

Диофантово уравнение $x^2 + dy^2 = 4n^2$ и целочисленные циклические многоугольники

Георгий Гуляев

17 сентября 2026 г.

1. Введение

В работе [1] была поставлена задача о размещении на окружности с целым радиусом вершин ломаной с целочисленными длинами звеньев $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ так, чтобы она замкнулась во вписанный k -угольник (последняя вершина совпала бы с первой) или же оказалась вписанной в половину окружности (начало и конец ломаной лежали бы на концах диаметра окружности).

В результате исследования данной задачи, в [1] было доказано несколько утверждений, описывающих требуемые условия ее решения, приведены алгоритмы и программы для компьютера, а также множество примеров найденных ломаных и многоугольников.

В работе [2] исследования поставленной задачи продолжились. Выяснилось, что длины x подходящих хорд для ломаной, вписанной в половину окружности, определяются решениями уравнения в натуральных числах

$$x^2 + dy^2 = 4n^2, \quad 0 < x < 2n, y > 0, \quad (1)$$

где n - радиус окружности, а d - некоторое бесквадратное натуральное число.

Была найдена удобная формула для точной проверки возможности вписать ломаную в половину окружности, доказана лемма о единственности бесквадратной части d и теорема о числе решений уравнения (1) при

$d = 3$ для сфенических чисел $n = pqr$, все простые числа p, q, r которых имеют вид $3k + 1$.

В утверждениях и примерах в [1-2] рассматривались, в основном, вписанные в полуокружность ломаные, состоящие из нечетного числа звеньев, поскольку четное их число появляется только при $d = 1$ и они определяются пифагоровыми тройками.

В настоящей работе результаты работ [1-2] обобщаются на любые натуральные радиусы n и исследуются ломаные, вписанные в дуги окружности, как с четным, так и с нечетным количеством звеньев.

2. Постановка задачи и основные теоремы

Следуя работе [1], поставим задачу о нахождении вписанных в окружность с целым радиусом n многоугольников с разными целыми сторонами и вписанных ломаных с разными целыми звеньями в дуги окружности с целым радиусом n .

Рассмотрим общий случай ломаной

$$L = \{x_i\}, x_i \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, x_1 < x_2 < \dots < x_k < 2n, \quad (2)$$

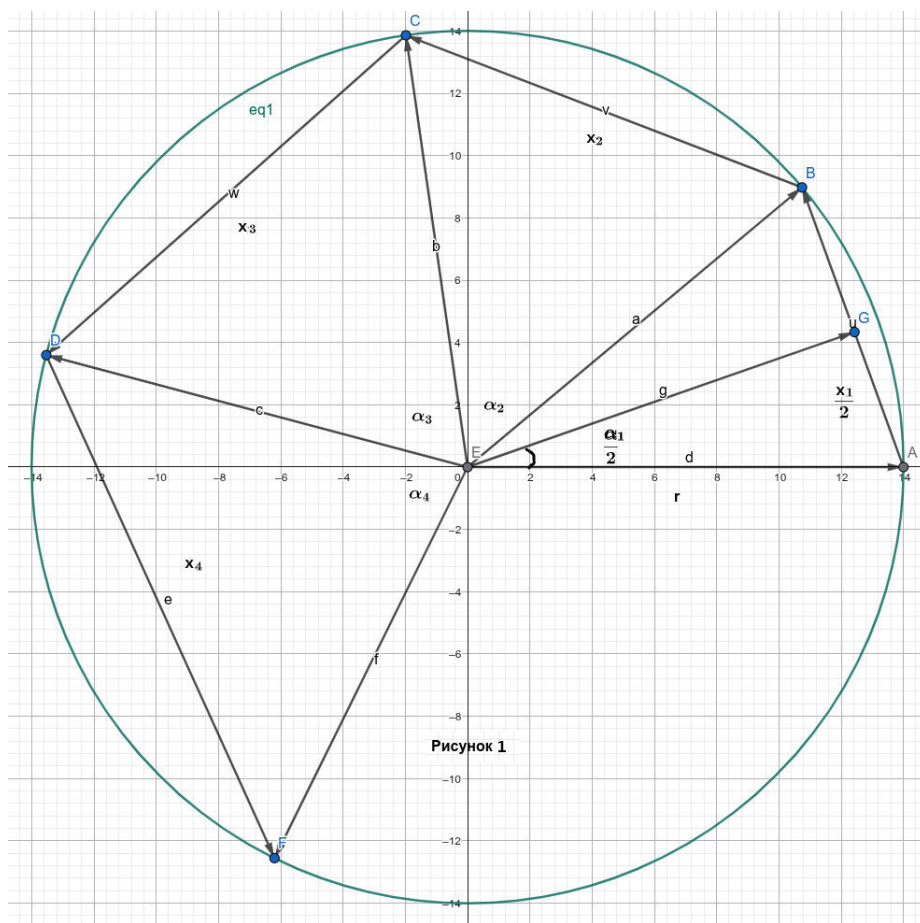
звенья x_i которой мы последовательно откладываем на окружности радиуса n . По построению, всегда будем подразумевать, что ломаная L не имеет разрывов и самопересечений, то есть, сумма стягиваемых ею дуг не превосходит 2π .

Проведем из центра окружности радиусы в каждую вершину ломаной (2) и обозначим углы, с вершинами в центре окружности, через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, соответственно сторонам $x_1, x_2, \dots, x_k$ (рисунок 1).

Определение 1. Будем говорить, что ломаная (2) **вписана в дугу** φ окружности радиуса n , если

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = \varphi. \quad (3)$$

Если $\varphi = \pi$, ломаная вписана в полуокружность. Если $\varphi = 2\pi$, ломаная является многоугольником, вписанным в окружность.



Опустив перпендикуляры из центра окружности на стороны ломаной, из полученных прямоугольных треугольников выводим соотношения (рисунок 1):

$$\sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) = \frac{x_i}{2n}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Таким образом, равенство (3) оказывается эквивалентно следующему:

$$\arcsin\left(\frac{x_1}{2n}\right) + \arcsin\left(\frac{x_2}{2n}\right) + \cdots + \arcsin\left(\frac{x_k}{2n}\right) = \frac{\varphi}{2} \quad (4)$$

Рассмотрим теперь k комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_k$ с рациональными

мнимыми частями $\frac{x_1}{2n}, \frac{x_2}{2n}, \dots, \frac{x_k}{2n}$, лежащих на единичной окружности:

$$z_1 = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4n^2}} + \frac{x_1}{2n}i, \quad z_2 = \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{4n^2}} + \frac{x_2}{2n}i, \dots, z_k = \sqrt{1 - \frac{x_k^2}{4n^2}} + \frac{x_k}{2n}i. \quad (5)$$

Теорема 1. Ломаная (2) будет вписана в дугу φ тогда и только тогда, когда произведение комплексных чисел (5) равно $e^{\frac{i\varphi}{2}}$:

$$\prod_{j=1}^k z_j = e^{\frac{i\varphi}{2}}. \quad (6)$$

Доказательство. Учитывая, что модули $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_k| = 1$, а аргументы равны соответственно $\arcsin\left(\frac{x_1}{2n}\right), \arcsin\left(\frac{x_2}{2n}\right), \dots, \arcsin\left(\frac{x_k}{2n}\right)$, перепишем наши числа (5) в показательной форме:

$$z_1 = e^{i \arcsin\left(\frac{x_1}{2n}\right)}, \quad z_2 = e^{i \arcsin\left(\frac{x_2}{2n}\right)}, \dots, \quad z_k = e^{i \arcsin\left(\frac{x_k}{2n}\right)}.$$

Тогда их произведение равно:

$$\prod_{j=1}^k z_j = e^{i \sum_{j=1}^k \arcsin\left(\frac{x_j}{2n}\right)} = e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Обратно, пусть выполняется (6), тогда

$$\sum_{j=1}^k \arcsin\left(\frac{x_j}{2n}\right) = \frac{\varphi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

По построению ломаной (2), геометрическая сумма дуг не превышает 2π , следовательно, $m = 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. Для полуокружности ($\varphi = \pi$):

$$\prod_{j=1}^k z_j = e^{\frac{i\pi}{2}} = i.$$

Следствие 2. Для окружности ($\varphi = 2\pi$):

$$\prod_{j=1}^k z_j = e^{i\pi} = -1.$$

Каждая хорда x_j , вписанная в окружность радиуса n , стягивает центральный угол α_j . Построим прямоугольный треугольник, где гипотенузой является диаметр $2n$, а одним из катетов — хорда x_j (рисунок 2).

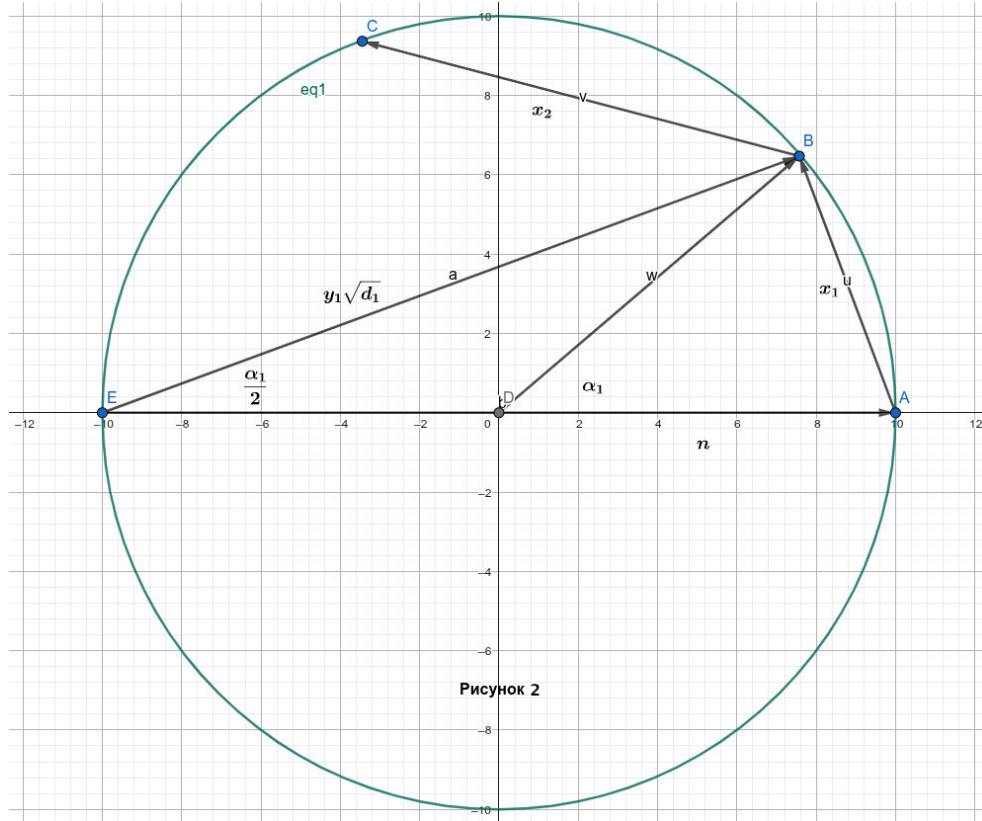


Рисунок 2. Построение сопряженного катета.

Длина второго катета по теореме Пифагора равна $\sqrt{4n^2 - x_j^2}$. Выделим наибольший полный квадрат из подкоренного выражения для каждого индекса j :

$$4n^2 - x_j^2 = d_j \cdot y_j^2. \quad (7)$$

Бесквадратные натуральные числа d_j в формулах (7) определяются однозначно для каждого $x_j < 2n$. Комплексные числа (5) для каждой хорды x_j теперь принимают вид:

$$z_j = \frac{y_j \sqrt{d_j} + ix_j}{2n}, \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (8)$$

и, с учетом этого, равенство (6) можно записать так:

$$\frac{\prod_{j=1}^k (y_j \sqrt{d_j} + ix_j)}{(2n)^k} = e^{\frac{i\varphi}{2}}. \quad (9)$$

Некоторые (или даже все) d_j здесь могут оказаться равными 1, и соответствующие радикалы исчезнут. А в том случае, когда $x_j = 2n$ - диаметр (такое может быть только для одной стороны вписанного многоугольника), $y_j = 0$ и d_j - неопределено.

В любом случае, $d_j = 1$ или $x_j = 2n$ для некоторого j приводят к исчезновению радикала в формулах (9). Поэтому, говоря о радикалах $\sqrt{d_j}$, далее мы будем подразумевать $d_j > 1$, то есть полагать, что все радикалы существуют явно.

Лемма 1. Если $d > 1$ - бесквадратное натуральное число, то при последовательном умножении k комплексных чисел вида $A_j \sqrt{d} + iB_j$, $A_j, B_j \in \mathbb{Q}$, радикал $\sqrt{d}$ в произведении будет перемещаться из действительной части во мнимую и обратно при каждом умножении. Конечный результат умножения будет иметь вид $A + iB\sqrt{d}$ при четном k и $A\sqrt{d} + iB$ при нечетном, где A и B - некоторые рациональные числа.

Доказательство. Следует из равенств для $A, B, C, D \in \mathbb{Q}$:

$$(A\sqrt{d} + iB)(C\sqrt{d} + iD) = ACd - BD + i(AD + BC)\sqrt{d}$$

$$(A\sqrt{d} + iB)(C + iD\sqrt{d}) = (AC - BD)\sqrt{d} + i(ADd + BC).$$

Из этих равенств, очевидно, что радикал $\sqrt{d}$ может исчезнуть только при нечетном числе сомножителей.

Лемма 2. Произведение двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, лежащих на единичной окружности, тогда и только тогда равно i , когда $c = b$ и $d = a$, то есть когда $c + di = b + ai$.

Доказательство. Так как оба числа находятся на единичной окружности, то $a^2 + b^2 = 1$ и $c^2 + d^2 = 1$. Очевидно, $(a+bi) \cdot (b+ai) = (a^2 + b^2) \cdot i = i$. Обратно, из условия $(a + bi) \cdot (c + di) = i$ следует

$$\begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 1 \end{cases}$$

Умножив второе равенство на c и воспользовавшись тем, что $ac = bd$ из первого равенства, получим $acd + bc^2 = bd^2 + bc^2 = b(d^2 + c^2) = b = c$.

Теперь, подставив c вместо b в первое равенство, находим $a = d$. Что и требовалось доказать.

Согласно лемме 1, если число z лежит на единичной окружности, то для того чтобы получить i в произведении его с другим числом, достаточно его умножить на $w = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z)i$.

Следствие 3. Для любого числа $k > 1$ комплексных чисел z_j , лежащих на единичной окружности:

$$\prod_{j=1}^k z_j = i \Leftrightarrow z_k = \operatorname{Im}\left(\prod_{j=1}^{k-1} z_j\right) + \operatorname{Re}\left(\prod_{j=1}^{k-1} z_j\right)i.$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 2.

Следствие 4. Пусть $z_1, \dots, z_k$ — комплексные числа на единичной окружности, и $\prod_{j=1}^k z_j = i$. Тогда для любого разбиения множества $\{1, \dots, k\}$ на два непустых подмножества S и T комплексные числа $P_S = \prod_{j \in S} z_j$ и $P_T = \prod_{j \in T} z_j$ лежат на единичной окружности и имеют вид:

$$P_S = a + bi, \quad P_T = b + ai.$$

Доказательство. Очевидно, P_S и P_T лежат на единичной окружности и $P_S P_T = i$. По лемме 2, если $P_S = a + bi$, то $P_T = b + ai$.

Теорема 2. Пусть ломаная (2) вписана в дугу φ окружности радиуса n , и d_j — бесквадратные части, определённые равенством (7). Тогда:

1. Если $\varphi = \pi$ (полуокружность), то все d_j равны между собой:

$$d_1 = d_2 = \dots = d_k = d.$$

2. Если $\varphi = 2\pi$ (полная окружность), то среди d_j найдётся не более двух различных чисел.
3. Если $0 < \varphi < 2\pi$ и $\varphi \neq \pi$, то число различных d_j ограничено только количеством звеньев ломаной k .

Доказательство.

Случай 1: $\varphi = \pi$ (полуокружность).

Формула (9) и следствие 1 в этом случае дают нам равенство:

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{y_j \sqrt{d_j}}{2n} + i \frac{x_j}{2n} \right) = i. \quad (10)$$

Пусть $d_1, \dots, d_m$ ($1 < m \leq k$) — все попарно различные, мультипликативно независимые значения среди исходных d_j . То есть, если есть мультипликативная зависимость, например $d_\alpha = d_{\alpha,1} d_{\alpha,2} \dots d_{\alpha,s}$, то, выделяем мультипликативный базис в линейном пространстве всех d_j с операцией $a \oplus b = \text{sf}(ab)$ (бесквадратная часть произведения) и выражаем все зависимые d_j , через элементы базиса.

Заменим в формуле (10) все произведения с одинаковыми d_j одним числом, перемножая их. По лемме 1, формула (10) примет вид:

$$\prod_{j=1}^s (A_j \sqrt{d_j} + i B_j) \prod_{j=s+1}^m (C_j + i D_j \sqrt{d_j}) = i,$$

где $A_j, B_j, C_j, D_j \in \mathbb{Q}$.

Тогда, по следствию 4,

$$\prod_{j=1}^s (A_j \sqrt{d_j} + i B_j) = a + bi, \quad \prod_{j=s+1}^m (C_j + i D_j \sqrt{d_j}) = b + ai.$$

Предположим, что $m = 2$. Тогда, возможны варианты: $s = 0, 1$ или 2 . Если $s = 0$, то первого равенства нет, есть только второе:

$$\begin{aligned} (C_1 + i D_1 \sqrt{d_1})(C_2 + i D_2 \sqrt{d_2}) &= i \text{ или} \\ C_1 C_2 - D_1 D_2 \sqrt{d_1 d_2} + i(C_1 D_2 \sqrt{d_2} + D_1 C_2 \sqrt{d_1}) &= i \text{ или} \\ \begin{cases} C_1 C_2 - D_1 D_2 \sqrt{d_1 d_2} = 0 \\ C_1 D_2 \sqrt{d_2} + D_1 C_2 \sqrt{d_1} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Первое равенство возможно при $d_1 = d_2$, но второе не может быть выполнено. Если $s = 1$, то

$$A_1 \sqrt{d_1} + i B_1 = a + bi, \quad C_2 + i D_2 \sqrt{d_2} = b + ai \text{ или}$$

$$\begin{cases} A_1\sqrt{d_1} = D_2\sqrt{d_2} \\ B_1 = C_2. \end{cases}$$

Первое равенство возможно только при $d_1 = d_2$, второе при этом выполняется автоматически. Если $s = 2$, то

$$(A_1\sqrt{d_1} + iB_1)(A_2\sqrt{d_2} + iB_2) = i \text{ или}$$

$$A_1A_2\sqrt{d_1d_2} - B_1B_2 + i(A_1B_2\sqrt{d_1} + B_1A_2\sqrt{d_2}) \text{ или}$$

$$\begin{cases} A_1A_2\sqrt{d_1d_2} - B_1B_2 = 0 \\ A_1B_2\sqrt{d_1} + B_1A_2\sqrt{d_2} = 1. \end{cases}$$

Первое равенство возможно при $d_1 = d_2$, но второе не может быть выполнено.

Итак, если $m = 2$, то $d_1 = d_2$.

Пусть теперь $m \geq 3$. Рассмотрим сомножитель с d_1 . Он имеет вид $A_1\sqrt{d_1} + iB_1$ или $C_1 + iD_1\sqrt{d_1}$. Обозначим его через T_1 , а произведение всех остальных сомножителей — через R : $T_1 \cdot R = i$.

По следствию 4 (лемма 2), если оба числа T_1 и R лежат на единичной окружности, то $R = \text{Im}(T_1) + \text{Re}(T_1)i$.

По этой формуле, если $T_1 = A_1\sqrt{d_1} + iB_1$, то $R = B_1 + iA_1\sqrt{d_1}$, а если $T_1 = C_1 + iD_1\sqrt{d_1}$, то $R = D_1\sqrt{d_1} + iC_1$.

С другой стороны, R есть произведение сомножителей с $d_j \neq d_1$. По лемме 1, раскрывая R , мы получаем выражение, содержащее только радикалы $\sqrt{d_j}$ при $j \geq 2$ и их произведения. Радикал $\sqrt{d_1}$ в нём не появляется (в силу независимости d_j).

Таким образом, радикала $\sqrt{d_1}$ в R быть не может и, при первом выборе T_1 , должно выполняться: $A_1\sqrt{d_1} = 0$, откуда $A_1 = 0$, а при втором: $D_1\sqrt{d_1} = 0$, откуда $D_1 = 0$.

В обоих случаях T_1 не содержит радикала. Так как $|T_1| = 1$, имеем $T_1 \in \{\pm 1, \pm i\}$. С другой стороны, T_1 , в общем случае, есть произведение сомножителей z_j с $d_j = d_1$, соответствующих некоторым звеньям ломаной с положительными центральными углами.

Значит, $0 < \arg T_1 < \pi/2$. Противоречие с тем, что $T_1 \in \{\pm 1, \pm i\}$.

Следовательно, $m \geq 3$ невозможно. Вместе с разобранным случаем $m = 2$ это даёт $m = 1$, то есть все d_j равны.

Случай 2: $\varphi = 2\pi$ (полная окружность).

Доказательство проводится аналогично случаю 1, с тремя отличиями.

Отличие 1. Формула (9) и следствие 2 дают

$$\prod_{j=1}^k \left(\frac{y_j \sqrt{d_j}}{2n} + i \frac{x_j}{2n} \right) = -1.$$

вместо i .

Отличие 2. Аналог следствия 4 для произведения -1 : если $P_S P_T = -1$ и оба числа лежат на единичной окружности, то

$$P_T = -\frac{1}{P_S} = -\overline{P_S}.$$

То есть, если $P_S = a + bi$, то $P_T = -a + bi$.

Отличие 3. При разборе $m \geq 3$ выбираем сомножитель T_1 с d_1 и обозначаем $R = T_2 \cdots T_m$. Тогда $T_1 R = -1$, откуда

$$R = -\overline{T_1}.$$

Если $T_1 = A_1 \sqrt{d_1} + iB_1$, то $R = -A_1 \sqrt{d_1} + iB_1$; если $T_1 = C_1 + iD_1 \sqrt{d_1}$, то $R = -C_1 + iD_1 \sqrt{d_1}$. В обоих случаях R содержит $\sqrt{d_1}$, если T_1 его содержит. Но R есть произведение сомножителей с $d_j \neq d_1$, значит, $\sqrt{d_1}$ в нём не появляется. Следовательно, T_1 не содержит радикала, и $T_1 \in \{\pm 1, \pm i\}$.

Далее, $\arg T_1$ лежит в $(0, \pi)$, так как сумма аргументов всех T_j равна π , а аргументы остальных положительны. Из $\{\pm 1, \pm i\}$ в этот интервал попадает только i . Значит, $T_1 = i$.

Тогда $R = -\bar{i} = i$. Применяя те же рассуждения к R , получаем, что каждый сомножитель в R тоже равен i (или R состоит из одного сомножителя). Но сумма аргументов R равна $\pi/2$, а каждый сомножитель имеет аргумент $\pi/2$ (если он равен i) или π (если он равен -1). Два сомножителя дали бы сумму $\geq \pi > \pi/2$. Значит, R содержит не более одного сомножителя, то есть $m - 1 \leq 1$, откуда $m \leq 2$.

Вывод. В обоих случаях $m \leq 2$, то есть среди d_j не более двух различных значений.

Существенное отличие от случая 1: там противоречие с $T_1 \in \{\pm 1, \pm i\}$ возникало сразу, а здесь $T_1 = i$ допустимо, и требуется дополнительный шаг — применить те же рассуждения к остатку R . Именно этот шаг и даёт ограничение $m \leq 2$.

Случай 3: $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \pi$ (произвольная дуга).

В случаях 1 и 2 правая часть равенства (9) была чисто мнимой ($\varphi = \pi$) или чисто вещественной ($\varphi = 2\pi$). Это позволяло отделить вещественную и мнимую части и получить однородное уравнение на радикалы, к которому применялись лемма 1, следствие 4 и разбор чётностей.

В случае произвольной дуги правая часть равна

$$e^{i\varphi/2} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2},$$

причём $\cos(\varphi/2) \neq 0$ и $\sin(\varphi/2) \neq 0$. После умножения на $(2n)^k$ и разделения на вещественную и мнимую части получаем два уравнения, в каждом из которых правая часть отлична от нуля:

$$\operatorname{Re} \prod_{j=1}^k (y_j \sqrt{d_j} + ix_j) = (2n)^k \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{Im} \prod_{j=1}^k (y_j \sqrt{d_j} + ix_j) = (2n)^k \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Ни одно из них не является однородным. Поэтому методы, использованные в случаях 1 и 2 (замена $\sqrt{d} \rightarrow -\sqrt{d}$, зануление коэффициентов при нетривиальных радикалах, сравнение рациональных и иррациональных частей), здесь неприменимы: радикалы могут присутствовать в обеих частях равенства и не обязаны сокращаться.

Ограничений на число различных d_j в этом случае не возникает. Это подтверждается приведенными ниже примерами.

Теорема 2 объясняет как размещаются целочисленные ломаные на окружности с целым радиусом. Если общий центральный угол, который они занимают, не π и не 2π , то они свободны от ограничений.

Приведу пример произвольной ломаной с целыми звеньями на окружности радиуса 100. Будем последовательно вписывать в окружность звенья с длинами из натурального ряда чисел.

```

n = 100
a = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] - десять звеньев

2*sum(map(x -> asin(x/(2*n)),a))*180/pi
31.519906325759496 - угол в градусах, который занимает ломаная

println("d = ",sort!(unique(map(x -> rem(4*100^2 - x^2), a))))
d = [39, 51, 399, 1111, 1599, 4439, 9991, 39919, 39991, 39999]
10 разных d

b = collect(1:20) - двадцать звеньев
julia> 2*sum(map(x -> asin(x/(2*n)),b))*180/pi
120.4267507711599 - угол в градусах,

julia> println("d = ",sort!(unique(map(x -> rem(4*100^2 - x^2), b))))
d = [11, 39, 51, 69, 399, 1111, 1591, 1599, 2491, 4431, 4439, 9919,
9951, 9991, 39639, 39711, 39831, 39919, 39991, 39999]
20 разных d

c = collect(1:30) - тридцать звеньев
julia> 2*sum(map(x -> asin(x/(2*n)),c))*180/pi
266.94521024901314 - угол в градусах,

julia> println("d = ",sort!(unique(map(x -> rem(4*100^2 - x^2), c))))
d = [7, 11, 39, 51, 69, 154, 391, 399, 1111, 1591, 1599, 2451, 2491,
4351, 4431, 4439, 9831, 9879, 9919, 9951, 9991, 39271, 39471, 39559,
39639, 39711, 39831, 39919, 39991, 39999]
30 разных d

```

3. Уравнение для хорд

Теорема 3. Пусть ломаная (2) вписана в половину окружности радиуса n . Тогда существует единое бесквадратное натуральное число d и такие натуральные y_j , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, что

$$x_j^2 + dy_j^2 = 4n^2, \forall j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

то есть все хорды x_j при некотором d удовлетворяют уравнению (1).

Доказательство. Теорема 2 гарантирует для вписанной в полуокружность ломаной единое d . Само же уравнение (1) это просто формула (7) при условии, что все d совпадают. Теорема доказана.

В условии следующей теоремы используется символ Лежандра, определенный для любых $a \in \mathbb{Z}$, и простых p :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \mid a, \\ 1, & \text{если } x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ имеет решение и } p \nmid a, \\ -1, & \text{если } x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ не имеет решения.} \end{cases}$$

Теорема 4. Пусть d — натуральное, бесквадратное, n разлагается на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

где все простые больше двух и удовлетворяют условию

$$\left(\frac{-d}{p_i}\right) = 1, i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Тогда число решений $R_d(n)$ уравнения (1) задаётся формулами:

$$R_d(n) = \begin{cases} \frac{3m-1}{2}, & d = 3, \\ \frac{m-1}{2}, & d \neq 3, \end{cases}$$

где $m = \prod_{i=1}^k (2\alpha_i + 1)$.

Доказательство. Уравнение (1) можно рассматривать как представление числа $4n^2$ в виде квадратичной формы $x^2 + dy^2$. Вопросы представления натуральных чисел квадратичными формами исследованы достаточно хорошо.

Для доказательства теоремы мы воспользуемся результатами изложенными в книге Дирихле "Лекции по теории чисел" ([4], § 85–86).

Количество представлений числа квадратичными формами зависит от дискриминанта формы, который в нашем случае равен $-4d$.

Согласно [4], для исследуемых значений d общее число представлений $N_{\mathbb{Z}}$ числа $4n^2$ формой в целых числах $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ выражается через сумму символов Кронекера-Якоби по всем делителям числа:

1. Для $d \neq 3$ (дискриминант $-4d$) число целых решений исходного уравнения задаётся формулой:

$$N_{\mathbb{Z}} = 2 \sum_{m|n^2} \left(\frac{-4d}{m} \right).$$

2. Для $d = 3$ (дискриминант -12) число целых решений исходного уравнения задаётся формулой:

$$N_{\mathbb{Z}} = 6 \sum_{m|n^2} \left(\frac{-3}{m} \right).$$

По условию теоремы, все нечётные простые делители числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ удовлетворяют условию $\left(\frac{-d}{p_i} \right) = 1$.

Поскольку суммирование ведётся по делителям квадрата $n^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_k^{2\alpha_k}$, для любого делителя m под знаком суммы символ Якоби равен единице: $\left(\frac{-4d}{m} \right) = 1$ (или $\left(\frac{-3}{m} \right) = 1$).

Следовательно, сумма сводится к подсчёту общего количества делителей числа n^2 , которое равно:

$$\tau(n^2) = \prod_{i=1}^k (2\alpha_i + 1) = m.$$

Таким образом, количество решений в целых числах составляет:

$$N_{\mathbb{Z}} = \begin{cases} 6m, & d = 3, \\ 2m, & d \neq 3. \end{cases}$$

Для перехода к решениям $R_d(n)$ в натуральных числах ($x > 0, y > 0$) необходимо исключить решения, лежащие на осях координат, и учесть симметрию знаков:

1. Подстановка $y = 0$ в уравнение (1) даёт $x^2 = 4n^2$, откуда $x = \pm 2n$, что даёт ровно 2 целых решения. Подстановка $x = 0$ не даёт решений, так как d бесквадратное и $d > 1$. Вычитаем эти две осевые точки: $N_{\mathbb{Z}} - 2$.

2. Каждому решению в натуральных числах соответствует ровно 4 комбинации знаков $(\pm x, \pm y)$ в целых числах.

Разделив оставшееся количество целых решений на 4, получаем искомый результат:

При $d = 3$:

$$R_3(n) = \frac{6m - 2}{4} = \frac{3m - 1}{2}.$$

При $d \neq 3$:

$$R_d(n) = \frac{2m - 2}{4} = \frac{m - 1}{2}.$$

Теорема доказана.

Попробуем экспериментально исследовать, как в зависимости от d изменяется с ростом n число решений уравнения (1), то есть число хорд.

На языке Julia напишем функцию `max_chords(d)`, в которой будем выводить число хорд для n , когда это число превосходит предыдущее максимальное значение.

```
function chords(n,d)
    m = div(2*n, isqrt(d))
    res = Int64[]
    for y in 1:m
        rem2 = 4*Int128(n)^2 - d*y^2
        if rem2 > 0
            x = isqrt(rem2)
            if x^2 == rem2
                push!(res, x)
            end
        end
    end
    sort!(res)
end
```

```

function max_chords(d)
    m = 0
    for n in 2:100000
        k = length(chords(n,d))
        if k > m
            println(string(n, " ", factor(Vector,n), " ", хорд: ",k))
            m = k
        end
    end
end
end

```

Функция `chords(n,d)` по n и d перебором вычисляет все длины хорд - решения уравнения (1). Почему мы не использовали готовые формулы из теоремы 4? Дело в том, что теорема 4 требует выполнения условий, налагаемых на простые множители n , которые, в общем случае, не всегда выполняются.

Функция `max_chords(d)` выводит по данному d число n , его разложение на простые множители и число решений уравнения (1) - число хорд для построения ломаной или многоугольника, вписанных в полуокружность или окружность радиуса n .

```

julia> max_chords(1)
5, [5], хорд: 2
25, [5, 5], хорд: 4
65, [5, 13], хорд: 8
325, [5, 5, 13], хорд: 14
1105, [5, 13, 17], хорд: 26
5525, [5, 5, 13, 17], хорд: 44
27625, [5, 5, 5, 13, 17], хорд: 62
32045, [5, 13, 17, 29], хорд: 80

```

Если $d = 1$, то решениями уравнения (1) являются пифагоровы тройки. Как будет показано в следующем разделе, этот случай подходит для построения, вписанных в полуокружность радиуса n ломаных, состоящих из четного числа звеньев.

Отмечаем простые делители радиусов, дающих максимум хорд в этом случае: $\{5, 13, 17, 29, \dots\}$.

```
julia> max_chords(2)
3, [3], хорд: 1
9, [3, 3], хорд: 2
27, [3, 3, 3], хорд: 3
33, [3, 11], хорд: 4
99, [3, 3, 11], хорд: 7
297, [3, 3, 3, 11], хорд: 10
561, [3, 11, 17], хорд: 13
1683, [3, 3, 11, 17], хорд: 22
5049, [3, 3, 3, 11, 17], хорд: 31
10659, [3, 11, 17, 19], хорд: 40
31977, [3, 3, 11, 17, 19], хорд: 67
95931, [3, 3, 3, 11, 17, 19], хорд: 94
```

```
julia> max_chords(3)
2, [2], хорд: 1
7, [7], хорд: 4
49, [7, 7], хорд: 7
91, [7, 13], хорд: 13
637, [7, 7, 13], хорд: 22
1729, [7, 13, 19], хорд: 40
12103, [7, 7, 13, 19], хорд: 67
53599, [7, 13, 19, 31], хорд: 121
```

```
julia> max_chords(5)
3, [3], хорд: 1
9, [3, 3], хорд: 2
21, [3, 7], хорд: 4
63, [3, 3, 7], хорд: 7
189, [3, 3, 3, 7], хорд: 10
441, [3, 3, 7, 7], хорд: 12
483, [3, 7, 23], хорд: 13
1323, [3, 3, 3, 7, 7], хорд: 17
1449, [3, 3, 7, 23], хорд: 22
4347, [3, 3, 3, 7, 23], хорд: 31
10143, [3, 3, 7, 7, 23], хорд: 37
13041, [3, 3, 3, 3, 7, 23], хорд: 40
30429, [3, 3, 3, 7, 7, 23], хорд: 52
```

42021, [3, 3, 7, 23, 29], хорд: 67

Для $d = 2$ число хорд растет на радиусах, содержащих в разложении простые $\{3, 11, 17, 19, \dots\}$.

Особый случай $d = 3$. Тут число хорд растет быстрее, чем для других d и это отражено и в том числе в формулах теоремы 4. Простые делители $\{2, 7, 13, 19, 31, \dots\}$.

Для $d = 5$ простые делители $\{3, 7, 23, 29, \dots\}$.

Для сравнения перепишем программу `max_chords(d)`, теперь основываясь на формулах из теоремы 4.

В ней перебираются только такие n , для всех простых делителей которых, соответствующий символ Лежандра равен 1: $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$.

```
function max_chords(d)
    m = 0
    for n in 2:100000
        r = 1; a = Vector{Int64}()
        for (p,k) in factor(n)
            if legendresymbol(-d,p) != 1
                r = 1
                break
            end
            r*=(2*k+1)
            for i in 1:k
                push!(a,p)
            end
        end
        c = div(r-1,2)
        if d == 3 c = div(3*r-1,2) end
        if c > m
            println(string(n," = ",a,"", хорд: ",c))
            m = c
        end
    end
end
```

```
julia> max_chords(2)
3 = [3], хорд: 1
9 = [3, 3], хорд: 2
27 = [3, 3, 3], хорд: 3
33 = [3, 11], хорд: 4
99 = [3, 3, 11], хорд: 7
297 = [3, 3, 3, 11], хорд: 10
561 = [3, 11, 17], хорд: 13
1683 = [3, 3, 11, 17], хорд: 22
5049 = [3, 3, 3, 11, 17], хорд: 31
10659 = [3, 11, 17, 19], хорд: 40
31977 = [3, 3, 11, 17, 19], хорд: 67
95931 = [3, 3, 3, 11, 17, 19], хорд: 94
```

```
julia> max_chords(3)
2 = Int64[], хорд: 1
7 = [7], хорд: 4
49 = [7, 7], хорд: 7
91 = [7, 13], хорд: 13
637 = [7, 7, 13], хорд: 22
1729 = [7, 13, 19], хорд: 40
12103 = [7, 7, 13, 19], хорд: 67
53599 = [7, 13, 19, 31], хорд: 121
```

```
julia> max_chords(5)
3 = [3], хорд: 1
9 = [3, 3], хорд: 2
21 = [3, 7], хорд: 4
63 = [3, 3, 7], хорд: 7
189 = [3, 3, 3, 7], хорд: 10
441 = [3, 3, 7, 7], хорд: 12
483 = [3, 7, 23], хорд: 13
1323 = [3, 3, 3, 7, 7], хорд: 17
1449 = [3, 3, 7, 23], хорд: 22
4347 = [3, 3, 3, 7, 23], хорд: 31
10143 = [3, 3, 7, 7, 23], хорд: 37
13041 = [3, 3, 3, 3, 7, 23], хорд: 40
30429 = [3, 3, 3, 7, 7, 23], хорд: 52
```

42021 = [3, 3, 7, 23, 29], хорд: 67

Получили полное совпадение. Это говорит о том, что максимумы числа хорд достигаются как раз на числах n , удовлетворяющих теореме 4. Добавим аналогичные данные еще для нескольких d :

```
julia> max_chords(7)
2, [2], хорд: 1
4, [2, 2], хорд: 2
8, [2, 2, 2], хорд: 3
16, [2, 2, 2, 2], хорд: 4
32, [2, 2, 2, 2, 2], хорд: 5
44, [2, 2, 11], хорд: 7
88, [2, 2, 2, 11], хорд: 10
176, [2, 2, 2, 2, 11], хорд: 13
352, [2, 2, 2, 2, 2, 11], хорд: 16
704, [2, 2, 2, 2, 2, 2, 11], хорд: 19
1012, [2, 2, 11, 23], хорд: 22
2024, [2, 2, 2, 11, 23], хорд: 31
4048, [2, 2, 2, 2, 11, 23], хорд: 40
8096, [2, 2, 2, 2, 2, 11, 23], хорд: 49
16192, [2, 2, 2, 2, 2, 2, 11, 23], хорд: 58
29348, [2, 2, 11, 23, 29], хорд: 67
58696, [2, 2, 2, 11, 23, 29], хорд: 94
```

```
julia> max_chords(11)
3, [3], хорд: 1
9, [3, 3], хорд: 2
15, [3, 5], хорд: 4
45, [3, 3, 5], хорд: 7
135, [3, 3, 3, 5], хорд: 10
225, [3, 3, 5, 5], хорд: 12
345, [3, 5, 23], хорд: 13
675, [3, 3, 3, 5, 5], хорд: 17
1035, [3, 3, 5, 23], хорд: 22
3105, [3, 3, 3, 5, 23], хорд: 31
5175, [3, 3, 5, 5, 23], хорд: 37
9315, [3, 3, 3, 3, 5, 23], хорд: 40
```

15525, [3, 3, 3, 5, 5, 23], хорд: 52
 32085, [3, 3, 5, 23, 31], хорд: 67
 77625, [3, 3, 3, 5, 5, 5, 23], хорд: 73
 96255, [3, 3, 3, 5, 23, 31], хорд: 94

```
julia> max_chords(13)
7, [7], хорд: 1
49, [7, 7], хорд: 2
77, [7, 11], хорд: 4
539, [7, 7, 11], хорд: 7
1309, [7, 11, 17], хорд: 13
9163, [7, 7, 11, 17], хорд: 22
24871, [7, 11, 17, 19], хорд: 40
```

Приведенные данные однозначно указывает на то, что для любого d количество решений уравнения (1) с ростом n неограниченно растет.

Теорема 5. Количество хорд для ломаной радиуса n (решений уравнения (1)) с ростом n неограниченно растет, то есть, для любого бесквадратного d и для любого натурального N существует такое натуральное n , для которого число решений уравнения (1) в натуральных числах строго больше N .

Доказательство. Для доказательства воспользуемся полученными в теореме 4 формулами для числа решений уравнения (1).

В условиях теоремы 4 символ Лежандра $\left(\frac{-d}{p}\right)$ зависит только от остатка p по модулю $4d$. Это следует из свойств символа Лежандра и квадратичного закона взаимности. Иными словами, если два простых числа p и q сравнимы по модулю $4d$, то $\left(\frac{-d}{p}\right) = \left(\frac{-d}{q}\right)$.

Поскольку $\left(\frac{-d}{p}\right)$ принимает значение 1 для некоторого класса вычетов a по модулю $4d$ (взаимно простого с $4d$), то, по известной теореме Дирихле о бесконечности простых чисел в арифметических прогрессиях, в этом классе существует бесконечно много простых чисел. Следовательно, условие $\left(\frac{-d}{p}\right) = 1$ выполняется для бесконечного множества простых чисел.

Выберем из этого бесконечного множества s различных нечётных простых чисел: $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$. Сконструируем натуральное число n как их

произведение:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s.$$

Поскольку все p_i различны, в каноническом разложении числа n все показатели степеней $\alpha_i = 1$. По теореме 4, количество решений $R_d(n)$ уравнения (1) в натуральных числах для данного n при $d \neq 3$ составляет:

$$R_d(n) = \frac{m-1}{2}, \quad \text{где } m = \prod_{i=1}^s (2\alpha_i + 1) = \prod_{i=1}^s (2 \cdot 1 + 1) = 3^s$$

Таким образом, число решений строго равно $R_d(n) = \frac{3^s-1}{2}$. Для случая $d = 3$ решений будет $\frac{3 \cdot 3^s-1}{2}$, то есть ещё больше. Чтобы преодолеть любую наперёд заданную границу N , достаточно выбрать количество простых множителей s таким, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{3^s-1}{2} > N \implies 3^s > 2N+1 \implies s > \log_3(2N+1).$$

Поскольку запас таких простых чисел бесконечен, мы всегда можем выбрать число s , удовлетворяющее этому условию, что гарантирует $R_d(n) > N$. Теорема доказана.

4. Ломанные, вписанные в половину окружности

В работах [1-2] было найдено много ломаных с разными целочисленными звеньями, вписанных в половину окружности с натуральными радиусами. В [1] эмпирически был обнаружен факт о едином бесквадратном d для таких ломаных, который здесь строго доказан в теореме 2, а также впервые была доказана формула для ломаных из трех звеньев ([1], формула (5)).

Мы сформулируем и докажем этот результат в наиболее общей виде.

Теорема 6. Для любого натурального радиуса окружности n и числа k звеньев ломаной $\{x_j\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ существует такой однородный многочлен степени k , с целыми коэффициентами $M(x_1, x_2, \dots, x_k, n)$, что множество решений уравнения

$$M(x_1, x_2, \dots, x_k, n) = 0 \tag{11}$$

описывает все возможные ломаные $\{x_j\}$, вписанные в половину окружности. В частных случаях $k = 1, 2, 3$ уравнение (11) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 2n = 0, & k = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 - 4n^2 = 0, & k = 2, \\ n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1x_2x_3 - 4n^3 = 0, & k = 3. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимое и достаточное условие вписанности ломаной $\{x_j\}$ в полуокружность радиуса n задается уравнением (10), которое с учетом теоремы 2 можно переписать в виде

$$\prod_{j=1}^k (y_j \sqrt{d} + ix_j) = i(2n)^k. \quad (12)$$

По теореме 3 все хорды удовлетворяют уравнению (1), поэтому получаем систему из $k + 2$ уравнения:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \prod_{j=1}^k (y_j \sqrt{d} + ix_j) = 0, \\ \operatorname{Im} \prod_{j=1}^k (y_j \sqrt{d} + ix_j) = (2n)^k, \\ y_j^2 d + x_j^2 - 4n^2 = 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Введём обозначение $Y_j = y_j \sqrt{d}$. Тогда это система принимает вид

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \prod_{j=1}^k (Y_j + ix_j) = 0, \\ \operatorname{Im} \prod_{j=1}^k (Y_j + ix_j) = (2n)^k, \\ Y_j^2 + x_j^2 - 4n^2 = 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{cases} \quad (13)$$

Все уравнения последней системы полиномиальные по переменным x_j, Y_j с целыми коэффициентами. Раскрывая произведение и используя соотношения $Y_j^2 = 4n^2 - x_j^2$, мы можем понизить степень каждого Y_j до первой. После приведения подобных каждое уравнение принимает вид

$$A(x_1, \dots, x_k, n) + \sqrt{d} B(x_1, \dots, x_k, n) = 0,$$

где A и B — многочлены с целыми коэффициентами. Поскольку $\sqrt{d}$ иррационально при $d > 1$, это равенство равносильно системе $A = 0, B = 0$. Тем самым радикалы исчезают, и мы получаем чисто полиномиальную систему.

Исключая из неё вспомогательные переменные Y_j , например, с помощью результата (результат — это полиномиальное выражение от коэффициентов, обращающееся в нуль тогда и только тогда, когда системы имеют общее решение), приходим к полиномиальному уравнению (11):

$$M(x_1, \dots, x_k, n) = 0,$$

где M — однородный многочлен степени k с целыми коэффициентами. Однородность и целочисленность коэффициентов сохраняются при исключении, поскольку исходная система состояла из однородных полиномов с целыми коэффициентами.

При исключении Y_j мы пользуемся тем, что каждое Y_j однозначно восстанавливается по x_j и n с точностью до знака: $Y_j = \pm \sqrt{4n^2 - x_j^2}$. Для вписанной ломаной, половинные центральные углы $\alpha_j \in (0, \pi/2)$, значит $\cos \alpha_j > 0$ и нужно брать знак плюс.

Поэтому система (13) с дополнительным условием $Y_j > 0$ эквивалентна исходной. Исключение Y_j даёт уравнение $M = 0$, решения которого при $x_j \in (0, 2n)$ и $Y_j > 0$ находятся во взаимно однозначном соответствии с вписанными ломаными. Посторонних решений не возникает, поскольку все преобразования на этом шаге были эквивалентными.

Проверим теперь формулы для $k = 1, 2, 3$.

- $k = 1$: $F = y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2n$. Формула: $x_1 - 2n = 0$.
- $k = 2$: $F = y_1 y_2 - x_1 x_2 = 0$. Возводим в квадрат: $y_1^2 y_2^2 = x_1^2 x_2^2$. Подставляем $y_j^2 = 4n^2 - x_j^2$:

$$(4n^2 - x_1^2)(4n^2 - x_2^2) = x_1^2 x_2^2 \Rightarrow 16n^4 - 4n^2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 x_2^2 = x_1^2 x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 4n^2.$$
- $k = 3$: $F = y_1 y_2 y_3 - x_1 x_2 y_3 - x_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 x_3 = 0$. Переносим: $y_1 y_2 y_3 = x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3$. Возводим в квадрат (один раз) и подставляем $y_j^2 = 4n^2 - x_j^2$. После упрощений получаем:

$$n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1 x_2 x_3 = 4n^3.$$

Это в точности формулы из условия теоремы. Таким образом, теорема полностью доказана.

В работах [1-2] мы мало уделяли внимания ломаным с четным числом хорд. В случае двух звеньев, вписанная в полуокружность ломаная, это всегда два катета прямоугольного треугольника вписанного в окружность, гипотенуза которого является диаметром. Уравнение (1) для таких ломаных имеет вид:

$$x^2 + y^2 = 4n^2,$$

то есть $d = 1$ (нет радикалов) и они полностью описываются пифагоровыми тройками.

Первые ломаные с четным числом звеньев $k > 2$ появляются в окружности с радиусом $n = 325$:

$n = 325$ (все ломаные):

[72, 646], $d = 1$
 [160, 630], $d = 1$
 [182, 624], $d = 1$
 [250, 600], $d = 1$
 [330, 560], $d = 1$
 [390, 520], $d = 1$
 [408, 506], $d = 1$
 [72, 160, 182, 520], $d = 1$
 [72, 160, 330, 408], $d = 1$
 [72, 182, 330, 390], $d = 1$
 [160, 182, 250, 390], $d = 1$
 [72, 330, 520, 560, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 408, 506, 520, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [160, 250, 520, 560, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [160, 390, 408, 560, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [160, 408, 506, 520, 560, 624, 630, 646], $d = 1$
 [182, 250, 506, 560, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [182, 390, 506, 520, 560, 624, 630, 646], $d = 1$
 [250, 330, 390, 560, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [250, 330, 506, 520, 560, 624, 630, 646], $d = 1$
 [250, 390, 408, 506, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [250, 390, 506, 520, 560, 600, 630, 646], $d = 1$
 [250, 408, 506, 520, 560, 600, 624, 646], $d = 1$

[330, 390, 408, 506, 560, 624, 630, 646], $d = 1$
 [330, 408, 506, 520, 560, 600, 624, 630], $d = 1$
 [72, 160, 182, 250, 330, 560, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 250, 390, 520, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 250, 408, 506, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 250, 506, 520, 560, 600, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 330, 390, 520, 560, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 330, 408, 506, 560, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 390, 408, 506, 520, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 390, 408, 506, 560, 600, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 182, 390, 408, 520, 560, 600, 624, 646], $d = 1$
 [72, 160, 250, 330, 390, 408, 600, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 250, 330, 390, 520, 560, 600, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 250, 330, 408, 506, 520, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 250, 330, 408, 506, 560, 600, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 250, 330, 408, 520, 560, 600, 624, 646], $d = 1$
 [72, 160, 250, 390, 408, 506, 520, 600, 630, 646], $d = 1$
 [72, 160, 330, 390, 408, 506, 520, 560, 630, 646], $d = 1$
 [72, 182, 250, 330, 390, 506, 520, 624, 630, 646], $d = 1$
 [72, 182, 250, 330, 390, 506, 560, 600, 630, 646], $d = 1$
 [72, 182, 250, 330, 390, 520, 560, 600, 624, 646], $d = 1$
 [72, 182, 250, 330, 408, 506, 560, 600, 624, 646], $d = 1$
 [72, 182, 250, 390, 408, 506, 520, 600, 624, 646], $d = 1$
 [72, 182, 330, 390, 408, 506, 520, 560, 624, 646], $d = 1$
 [72, 182, 330, 390, 408, 506, 520, 600, 624, 630], $d = 1$
 [72, 250, 330, 390, 408, 506, 520, 560, 600, 646], $d = 1$
 [160, 182, 250, 330, 390, 520, 560, 600, 624, 630], $d = 1$
 [160, 182, 250, 330, 408, 506, 560, 600, 624, 630], $d = 1$
 [160, 182, 250, 390, 408, 506, 520, 560, 624, 646], $d = 1$
 [160, 182, 250, 390, 408, 506, 520, 600, 624, 630], $d = 1$
 [160, 182, 330, 390, 408, 506, 520, 560, 624, 630], $d = 1$
 [160, 250, 330, 390, 408, 506, 520, 560, 600, 630], $d = 1$
 [182, 250, 330, 390, 408, 506, 520, 560, 600, 624], $d = 1$

Таким образом, для $n = 325$ найдены двух, четырех, восьми и десяти звенные ломаные и во всех случаях $d = 1$, то есть каждая хорда является катетом прямоугольного треугольника вписанного в окружность.

Теорема 7. Пусть n — натуральное число и пусть $k = 2m$ — чётное число. Если ломаная из k целочисленных звеньев с длинами $x_1, \dots, x_k$ вписана в полуокружность радиуса n , то число $4n^2 - x_j^2$ для всех j является полным квадратом (то есть $d_j = 1$ для всех j).

Доказательство. По теореме 2, все d_j равны: $d_1 = d_2 = \dots = d_k = d$. Условие вписанности ломаной в полуокружность, согласно следствию 1:

$$\prod_{j=1}^k z_j = i,$$

где z_j — комплексные числа (8). Согласно лемме 1, при перемножении комплексных чисел $y_j\sqrt{d} + ix_j$ радикал $\sqrt{d}$ будет перемещаться из действительной части во мнимую и обратно при каждом умножении. Количество умножений нечетно, поэтому в конце он окажется во мнимой части:

$$\frac{A + iB\sqrt{d}}{(2n)^k} = i, A, B \in \mathbb{Z}.$$

То есть $A = 0$, $B\sqrt{d} = (2n)^k \Rightarrow d = 1$. По теореме 3, $4n^2 - x_j^2 = y_j^2$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Теорема доказана.

В теореме 5 мы видели, что количество хорд неограниченно растёт вместе с радиусом окружности n . И этот факт способствует тому, что, как показывает следующая теорема, это свойство распространяется и на ломаные, вписанные в полуокружность.

Лемма 3. Для любого натурального $a > 1$ справедливо равенство

$$\arctg \frac{1}{a} = \arctg \frac{1}{a+1} + \arctg \frac{1}{a^2 + a + 1}. \quad (14)$$

Доказательство. Действительно, применяя формулу тангенса суммы к правой части:

$$\operatorname{tg} \left(\arctg \frac{1}{a+1} + \arctg \frac{1}{a^2 + a + 1} \right) = \frac{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2 + a + 1}}{1 - \frac{1}{(a+1)(a^2 + a + 1)}}$$

Числитель равен $\frac{a^2 + 2a + 2}{(a+1)(a^2 + a + 1)}$, знаменатель равен $\frac{a(a^2 + 2a + 2)}{(a+1)(a^2 + a + 1)}$. Их отношение равно $1/a$, что и требовалось.

Теорема 8. Число звеньев ломаных с различными целочисленными звеньями, вписанных в полуокружность целого радиуса, не ограничено сверху. Иными словами, для любого натурального N найдутся такие натуральные n и $k > N$, что существует ломаная из k различных целочисленных звеньев, вписанная в полуокружность радиуса n .

Доказательство. Используем известное тождество

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Применяя к любому слагаемому формулу (14) нужное число раз, получаем для любого $m \geq 2$ представление

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^m \operatorname{arctg} \frac{1}{a_i},$$

где все a_i — различные натуральные числа, большие единицы. Например, для $m = 3$, применяем формулу (14) для $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

Обозначим $\theta_i = \operatorname{arctg} \frac{1}{a_i}$. Тогда $\sum \theta_i = \pi/4$, и

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{i=1}^m 2\theta_i.$$

Каждый удвоенный угол имеет рациональные синус и косинус:

$$\sin 2\theta_i = \frac{2a_i}{a_i^2 + 1}, \quad \cos 2\theta_i = \frac{a_i^2 - 1}{a_i^2 + 1}.$$

Пусть M — четное общее кратное чисел $a_i^2 + 1$. Положим $2n = M$, то есть $n = M/2$. Тогда каждое звено

$$x_i = 2n \cdot \sin 2\theta_i = M \cdot \frac{2a_i}{a_i^2 + 1} = 2a_i \cdot \frac{M}{a_i^2 + 1}$$

является целым числом. Все x_i различны, поскольку функция $a \mapsto \frac{2a}{a^2 + 1}$ убывает при $a > 1$, а все a_i различны и больше единицы.

Сумма половинных углов построенных звеньев равна

$$\sum_{i=1}^m \arcsin \frac{x_i}{2n} = \sum_{i=1}^m \arcsin(\sin 2\theta_i) = \sum_{i=1}^m 2\theta_i = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, ломаная с длинами $x_1, \dots, x_m$ вписана в полуокружность радиуса n .

Наконец, для каждого i

$$4n^2 - x_i^2 = 4n^2 (1 - \sin^2 2\theta_i) = 4n^2 \cos^2 2\theta_i = (2n \cos 2\theta_i)^2,$$

то есть $4n^2 - x_i^2$ — полный квадрат, и $d_i = 1$ для всех i .

Поскольку m можно выбрать сколь угодно большим (применяя расщепление леммы 3 любое число раз), для любого N найдётся $m > N$, а вместе с ним и ломаная из m различных звеньев. Следовательно, число звеньев не ограничено сверху.

Замечание. Все построенные ломаные имеют $d_j = 1$ (пифагоровы хорды). Это согласуется с теоремой 7: при чётном k в полуокружности других d быть не может; но приведённая конструкция работает и для нечётных k , поскольку мы строим ломаные с $d_j = 1$ напрямую.

Пример. Для $m = 3$, имеем $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$. Тогда $a_1^2 + 1 = 5$, $a_2^2 + 1 = 26$, $a_3^2 + 1 = 65$. Общее кратное $M = 130$, значит $n = 65$. Звенья:

$$x_1 = 130 \cdot \frac{4}{5} = 104, \quad x_2 = 130 \cdot \frac{10}{26} = 50, \quad x_3 = 130 \cdot \frac{16}{65} = 32.$$

Ломаная $[32, 50, 104]$ вписана в полуокружность радиуса 65, все $d_j = 1$.

При исследовании ломаных для окружностей радиусов вида $n = p_1 p_2 \dots p_s$ с разными простыми p_j (обобщение сфенических чисел), была обнаружена следующая закономерность, которую мы сформулируем как гипотезу.

Гипотеза. Для любого натурального s при

$$n_s = p_1 p_2 \dots p_s, \quad p_j \equiv 1 \pmod{3} \text{ — простые,}$$

существует ломаная из $2s + 1$ различных целочисленных звеньев с единым $d = 3$, вписанная в полуокружность радиуса n_s .

Численное подтверждение (L - пример ломаной):

s	n_s	k	L
1	7	3	[2, 7, 11]
2	$91 = 7 * 13$	5	[7, 26, 61, 74, 107]
3	$1729 = 7 * 13 * 19$	7	[133, 299, 386, 494, 649, 1261, 2033]
4	$53599 = 7 * 13 * 19 * 31$	9	[2002, 3154, 4123, 4711, 6526, 9229, 9269, 12929, 94829]

5. Многоугольники, вписанные в окружность

Для каждой ломаной вписанной в полуокружность по теореме 2 должно быть единое d . Это дает существенное ограничение, используемое при составлении программ для вычисления таких ломаных.

Для того чтобы избежать приближенных вычислений нужно было придумать структуру для умножения выражений с радикалами, не вычисляя их. Что и было сделано в работе [2], используя идею леммы 1. А именно, замкнутость множества комплексных чисел $\{A\sqrt{d}+Bi, C+D\sqrt{d}\}$ относительно операции умножения.

```
function mult3(d,z1,z2,z3)
  A = real(z1); B = imag(z1)
  C = real(z2); D = imag(z2)
  E = real(z3); F = imag(z3)
  G = d*A*C-B*D; H = C*B+A*D
  G*E - H*F + im*(G*F+d*H*E)
end
```

Функцией mult3 можно вычислять произведение любого нечетного количества комплексных чисел вида $A\sqrt{d}+Bi$, применяя ее последовательно столько раз сколько нужно. Для многоугольников, по теореме 2, может быть два различных d . поэтому для умножения приближенных вычислений не получится использовать такую простую структуру.

В этом случае, множество $M2 = \{A + B\sqrt{d_1} + C\sqrt{d_2} + E\sqrt{d_1d_2}\}$ замкнуто относительно операции умножения и именно оно использовалось для составления программ.

СТРУКТУРА M2

```
=====
Число M2: a + b*sqrt(d1) + c*sqrt(d2) + e*sqrt(d1*d2)
struct M2
  a::Int64
  b::Int64
  c::Int64
  e::Int64
end
```

Сложение

```
function add_M2(z1::M2, z2::M2)
    M2(z1.a + z2.a, z1.b + z2.b, z1.c + z2.c, z1.e + z2.e)
end
```

Вычитание

```
function sub_M2(z1::M2, z2::M2)
    M2(z1.a - z2.a, z1.b - z2.b, z1.c - z2.c, z1.e - z2.e)
end
```

Умножение

```
function mul_M2(z1::M2, z2::M2, d1::Int64, d2::Int64)
    a = z1.a * z2.a + z1.b * z2.b * d1 + z1.c * z2.c * d2 + z1.e *
        z2.e * d1 * d2
    b = z1.a * z2.b + z1.b * z2.a + z1.c * z2.e * d2 + z1.e * z2.c * d2
    c = z1.a * z2.c + z1.c * z2.a + z1.b * z2.e * d1 + z1.e * z2.b * d1
    e = z1.a * z2.e + z1.e * z2.a + z1.b * z2.c + z1.c * z2.b
    return M2(a, b, c, e)
end
```

Проверка на ноль

```
iszero_M2(z::M2) = (z.a == 0 && z.b == 0 && z.c == 0 && z.e == 0)
```

Проверка на равенство

```
eq_M2(z1::M2, z2::M2) = (z1.a == z2.a && z1.b == z2.b && z1.c == z2.c &&
z1.e == z2.e)
```

Приведение M2 к каноническому виду

```
function canonical_M2(z::M2, d1::Int64, d2::Int64)
    if d1 == 1 && d2 == 1
        return (z.a + z.b + z.c + z.e, 0)
    elseif d1 == 1
        return (z.a + z.b, z.c + z.e)
    elseif d2 == 1
        return (z.a + z.c, z.b + z.e)
    else
        return (z.a, z.b, z.c, z.e)
    end
end
```

```

    end
end

```

```

=====
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА C2
=====

```

Комплексное число: $A + B \cdot i$, где A, B из $M2$

```

struct C2
    A::M2
    B::M2
end

```

Умножение комплексных чисел

```

function mul_C2(z1::C2, z2::C2, d1::Int64, d2::Int64)
    A = sub_M2(mul_M2(z1.A, z2.A, d1, d2), mul_M2(z1.B, z2.B, d1, d2))
    B = add_M2(mul_M2(z1.A, z2.B, d1, d2), mul_M2(z1.B, z2.A, d1, d2))
    return C2(A, B)
end

```

При помощи составленных программ были вычислены все целочисленные многоугольники вписанные в окружности радиусов $n \leq 300$, начальная часть из них приводится в таблице в разделе 6.

В заключение докажем теорему о диаметре, описывающую условия при которых вписанный многоугольник имеет диаметр окружности в качестве стороны или диагонали.

Лемма 4. Не существует целочисленного многоугольника с нечетным числом сторон, вписанного в окружность натурального радиуса n , для которого все d_j равны одному $d > 1$.

Доказательство. Условие вписанности в полную окружность:

$$\prod_{j=1}^k z_j = -1, \quad z_j = \frac{y_j \sqrt{d} + i x_j}{2n}.$$

Так как k нечётно, по лемме 1 произведение имеет вид

$$\prod_{j=1}^k (y_j \sqrt{d} + i x_j) = A \sqrt{d} + i B, \quad A, B \in \mathbb{Q}.$$

Приравнивая к $-1 \cdot (2n)^k$, получаем $A\sqrt{d} = -(2n)^k$ и $B = 0$. Тогда

$$|A\sqrt{d} + iB|^2 = A^2d + B^2 = A^2d.$$

С другой стороны, модуль произведения равен $(2n)^k$, то есть

$$A^2d = (2n)^{2k} \implies A^2 = \frac{(2n)^{2k}}{d}.$$

Правая часть рациональна, значит A рационально. Тогда $A^2d = (2n)^{2k}$ означает, что d — квадрат рационального числа $(2n)^k/A$. Но $d > 1$ бесквадратно, а квадрат рационального числа не может быть бесквадратным числом, большим единицы (иначе d было бы полным квадратом).

Противоречие. Следовательно, такого многоугольника не существует.

Теорема 9. Пусть целочисленный многоугольник с нечётным числом звеньев $k = 2m + 1$ вписан в окружность целого радиуса n , и хотя бы одно $d_j > 1$. Тогда диаметр $2n$ является хордой этого многоугольника (стороной или диагональю).

Доказательство. Если все $d_j = 1$, то утверждение тривиально (диаметр может быть, может не быть, но это не наш случай). Пусть хотя бы одно $d_j > 1$.

Если бы все d_j были равны одному $d > 1$, то по лемме такой многоугольник с нечётным k не существовал бы. Значит, среди d_j есть хотя бы два различных значения.

По теореме 2 (случай 2) среди d_j не более двух различных значений. Следовательно, их ровно два: $d_1 \neq d_2$.

Разобьём сомножители на две группы: с d_1 (пусть их k_1) и с d_2 (пусть их k_2). Тогда $k_1 + k_2 = k$ нечётно, значит одна из k_1, k_2 чётна, другая нечётна. Пусть для определённости k_1 чётно, k_2 нечётно.

Если оба $d_1, d_2 > 1$, то $T_1 = A_1 + iB_1\sqrt{d_1}$, $T_2 = A_2\sqrt{d_2} + iB_2$, и равенство $T_1T_2 = -1$ даёт $A_1A_2\sqrt{d_2} - B_1B_2\sqrt{d_1} = -1$. Левая часть — линейная комбинация двух независимых радикалов, не равная рациональному числу. Противоречие. Такой многоугольник не существует.

Значит, одно из значений равно 1. Покажем, что значение 1 не может стоять в нечётной группе. Предположим, что $d_2 = 1$ (то есть группа с $d = 1$ имеет нечётное число сомножителей k_2).

Тогда $T_1 = A_1 + iB_1\sqrt{d_1}$ (так как k_1 чётно), $T_2 = A_2 + iB_2$ (так как $d_2 = 1$).
Равенство $T_1T_2 = -1$ даёт

$$A_1A_2 - B_1B_2\sqrt{d_1} = -1, \quad A_1B_2 + B_1A_2\sqrt{d_1} = 0.$$

Из второго равенства $A_1B_2 = 0$ и $B_1A_2 = 0$. Из первого, поскольку $B_1B_2\sqrt{d_1}$ иррационально при $B_1B_2 \neq 0$, получаем $B_1B_2 = 0$ и $A_1A_2 = -1$.

Тогда $A_1, A_2 \in \{\pm 1\}$, поскольку $|T_1| = |T_2| = 1$ и $B_1B_2 = 0$, один из коэффициентов B равен нулю, и из $A_i^2 + B_i^2(\dots) = 1$ следует $A_i = \pm 1$ для соответствующего i , а тогда и для другого.

T_1, T_2 - оба вещественны. Значит, один из аргументов равен 0 — противоречие с положительностью аргументов. Следовательно, $d_2 \neq 1$, то есть $d_1 = 1$.

Тогда $T_1 = A_1 + iB_1$, $T_2 = A_2\sqrt{d_2} + iB_2$. Из $T_1T_2 = -1$ получаем $A_1A_2 = 0$, $A_1B_2 = 0$, $B_1A_2 = 0$. Единственное решение с $|T_1| = |T_2| = 1$: $A_1 = A_2 = 0$, $B_1B_2 = 1$. Поскольку аргументы положительны и в сумме дают π , получаем $T_1 = T_2 = i$.

Итак, произведение сомножителей с $d = 1$ равно i , то есть сумма центральных углов этих сторон равна π . Их концы — вершины многоугольника, отстоящие на дугу π , то есть диаметрально противоположные. Следовательно, диаметр $2n$ является хордой.

6. Таблица многоугольников ($n \leq 100$)

Приведены все многоугольники, вписанные в окружности радиусов $n \leq 100$. Если $d = 0$, то одна из сторон - диаметр, если $d = 1$, то радикалов нет (пифагоровы тройки).

$n = 5$:

$$[6, 8, 10], d = [0, 1]$$

$n = 7$:

$$[2, 7, 11, 14], d = [0, 3]$$

$n = 8$:

$$[2, 9, 12, 16], d = [0, 7]$$

$n = 10$:

$$[12, 16, 20], d = [0, 1]$$

$n = 13$:
 $[10, 24, 26], d = [0, 1]$
 $[1, 13, 22, 26], d = [0, 3]$
 $[1, 10, 13, 22, 24], d = [1, 3]$
 $n = 14$:
 $[4, 14, 22, 28], d = [0, 3]$
 $n = 15$:
 $[18, 24, 30], d = [0, 1]$
 $[3, 14, 25, 30], d = [0, 11]$
 $[3, 14, 18, 24, 25], d = [1, 11]$
 $n = 16$:
 $[4, 18, 24, 32], d = [0, 7]$
 $[8, 17, 22, 32], d = [0, 15]$
 $[4, 8, 17, 18, 22, 24], d = [7, 15]$
 $n = 17$:
 $[16, 30, 34], d = [0, 1]$
 $n = 19$:
 $[11, 19, 26, 38], d = [0, 3]$
 $n = 20$:
 $[24, 32, 40], d = [0, 1]$
 $n = 21$:
 $[6, 21, 33, 42], d = [0, 3]$
 $[12, 22, 28, 42], d = [0, 5]$
 $[6, 12, 21, 22, 28, 33], d = [3, 5]$
 $n = 22$:
 $[12, 19, 33, 44], d = [0, 7]$
 $n = 24$:
 $[6, 27, 36, 48], d = [0, 7]$
 $n = 25$:
 $[14, 48, 50], d = [0, 1]$
 $[30, 40, 50], d = [0, 1]$
 $n = 26$:
 $[20, 48, 52], d = [0, 1]$
 $[2, 26, 44, 52], d = [0, 3]$
 $[2, 20, 26, 44, 48], d = [1, 3]$
 $n = 27$:
 $[10, 21, 45, 54], d = [0, 11]$
 $n = 28$:

$[8, 28, 44, 56], d = [0, 3]$
 $n = 29:$
 $[40, 42, 58], d = [0, 1]$
 $n = 30:$
 $[36, 48, 60], d = [0, 1]$
 $[6, 28, 50, 60], d = [0, 11]$
 $[6, 28, 36, 48, 50], d = [1, 11]$
 $n = 31:$
 $[13, 31, 46, 62], d = [0, 3]$
 $n = 32:$
 $[8, 36, 48, 64], d = [0, 7]$
 $[16, 34, 44, 64], d = [0, 15]$
 $[8, 16, 34, 36, 44, 48], d = [7, 15]$
 $n = 33:$
 $[11, 39, 46, 66], d = [0, 35]$
 $[22, 34, 42, 66], d = [0, 2]$
 $[11, 22, 34, 39, 42, 46], d = [2, 35]$
 $n = 34:$
 $[32, 60, 68], d = [0, 1]$
 $[17, 28, 53, 68], d = [0, 15]$
 $[17, 28, 32, 53, 60], d = [1, 15]$
 $n = 35:$
 $[42, 56, 70], d = [0, 1]$
 $[6, 25, 63, 70], d = [0, 19]$
 $[10, 35, 55, 70], d = [0, 3]$
 $[14, 38, 50, 70], d = [0, 6]$
 $[6, 25, 42, 56, 63], d = [1, 19]$
 $[10, 35, 42, 55, 56], d = [1, 3]$
 $[14, 38, 42, 50, 56], d = [1, 6]$
 $[6, 10, 25, 35, 55, 63], d = [3, 19]$
 $[10, 14, 35, 38, 50, 55], d = [3, 6]$
 $[6, 14, 25, 38, 50, 63], d = [6, 19]$
 $n = 36:$
 $[3, 26, 66, 72], d = [0, 23]$
 $n = 37:$
 $[24, 70, 74], d = [0, 1]$
 $[26, 37, 47, 74], d = [0, 3]$
 $[24, 26, 37, 47, 70], d = [1, 3]$

$n = 38$:
 $[19, 44, 49, 76], d = [0, 15]$
 $[22, 38, 52, 76], d = [0, 3]$
 $[19, 22, 38, 44, 49, 52], d = [3, 15]$

$n = 39$:
 $[30, 72, 78], d = [0, 1]$
 $[3, 39, 66, 78], d = [0, 3]$
 $[13, 43, 57, 78], d = [0, 35]$
 $[3, 30, 39, 66, 72], d = [1, 3]$
 $[13, 30, 43, 57, 72], d = [1, 35]$
 $[3, 13, 39, 43, 57, 66], d = [3, 35]$

$n = 40$:
 $[48, 64, 80], d = [0, 1]$
 $[28, 41, 50, 80], d = [0, 39]$
 $[10, 45, 60, 80], d = [0, 7]$
 $[28, 41, 48, 50, 64], d = [1, 39]$
 $[10, 45, 48, 60, 64], d = [1, 7]$
 $[10, 28, 41, 45, 50, 60], d = [7, 39]$

$n = 41$:
 $[18, 80, 82], d = [0, 1]$

$n = 42$:
 $[12, 42, 66, 84], d = [0, 3]$
 $[24, 44, 56, 84], d = [0, 5]$
 $[12, 24, 42, 44, 56, 66], d = [3, 5]$

$n = 43$:
 $[22, 43, 61, 86], d = [0, 3]$

$n = 44$:
 $[10, 55, 62, 88], d = [0, 39]$
 $[11, 24, 81, 88], d = [0, 7]$
 $[11, 38, 74, 88], d = [0, 7]$
 $[24, 38, 66, 88], d = [0, 7]$
 $[10, 11, 24, 55, 62, 81], d = [7, 39]$
 $[10, 11, 38, 55, 62, 74], d = [7, 39]$
 $[10, 24, 38, 55, 62, 66], d = [7, 39]$

$n = 45$:
 $[54, 72, 90], d = [0, 1]$
 $[9, 35, 79, 90], d = [0, 11]$
 $[9, 42, 75, 90], d = [0, 11]$

[35, 42, 57, 90], d = [0, 11]
 [9, 35, 54, 72, 79], d = [1, 11]
 [9, 42, 54, 72, 75], d = [1, 11]
 [35, 42, 54, 57, 72], d = [1, 11]
 n = 46:
 [23, 43, 68, 92], d = [0, 15]
 [29, 36, 69, 92], d = [0, 7]
 [23, 29, 36, 43, 68, 69], d = [7, 15]
 n = 48:
 [12, 54, 72, 96], d = [0, 7]
 [24, 51, 66, 96], d = [0, 15]
 [12, 24, 51, 54, 66, 72], d = [7, 15]
 n = 49:
 [14, 23, 91, 98], d = [0, 3]
 [14, 49, 77, 98], d = [0, 3]
 [23, 49, 71, 98], d = [0, 3]
 n = 50:
 [28, 96, 100], d = [0, 1]
 [60, 80, 100], d = [0, 1]
 n = 51:
 [48, 90, 102], d = [0, 1]
 [17, 38, 87, 102], d = [0, 35]
 [6, 34, 94, 102], d = [0, 2]
 [17, 38, 48, 87, 90], d = [1, 35]
 [6, 34, 48, 90, 94], d = [1, 2]
 [6, 17, 34, 38, 87, 94], d = [2, 35]
 n = 52:
 [40, 96, 104], d = [0, 1]
 [4, 52, 88, 104], d = [0, 3]
 [6, 39, 94, 104], d = [0, 55]
 [4, 40, 52, 88, 96], d = [1, 3]
 [6, 39, 40, 94, 96], d = [1, 55]
 [4, 6, 39, 52, 88, 94], d = [3, 55]
 n = 53:
 [56, 90, 106], d = [0, 1]
 n = 54:
 [20, 42, 90, 108], d = [0, 11]
 n = 55:

```

[66, 88, 110], d = [0, 1]
[2, 44, 100, 110], d = [0, 21]
[25, 59, 77, 110], d = [0, 51]
[15, 34, 99, 110], d = [0, 19]
[22, 50, 86, 110], d = [0, 6]
[2, 44, 66, 88, 100], d = [1, 21]
[25, 59, 66, 77, 88], d = [1, 51]
[15, 34, 66, 88, 99], d = [1, 19]
[22, 50, 66, 86, 88], d = [1, 6]
[2, 25, 44, 59, 77, 100], d = [21, 51]
[2, 15, 34, 44, 99, 100], d = [19, 21]
[15, 25, 34, 59, 77, 99], d = [19, 51]
[2, 22, 44, 50, 86, 100], d = [6, 21]
[15, 22, 34, 50, 86, 99], d = [6, 19]
[22, 25, 50, 59, 77, 86], d = [6, 51]
n = 56:
[4, 62, 91, 112], d = [0, 87]
[7, 58, 92, 112], d = [0, 255]
[42, 57, 68, 112], d = [0, 55]
[14, 63, 84, 112], d = [0, 7]
[16, 56, 88, 112], d = [0, 3]
[4, 7, 58, 62, 91, 92], d = [87, 255]
[4, 42, 57, 62, 68, 91], d = [55, 87]
[7, 42, 57, 58, 68, 92], d = [55, 255]
[4, 14, 62, 63, 84, 91], d = [7, 87]
[7, 14, 58, 63, 84, 92], d = [7, 255]
[14, 42, 57, 63, 68, 84], d = [7, 55]
[4, 16, 56, 62, 88, 91], d = [3, 87]
[7, 16, 56, 58, 88, 92], d = [3, 255]
[16, 42, 56, 57, 68, 88], d = [3, 55]
[14, 16, 56, 63, 84, 88], d = [3, 7]
n = 57:
[14, 38, 102, 114], d = [0, 2]
[33, 57, 78, 114], d = [0, 3]
[14, 33, 38, 57, 78, 102], d = [2, 3]
n = 58:
[80, 84, 116], d = [0, 1]
n = 60:

```

```

[72, 96, 120], d = [0, 1]
[12, 56, 100, 120], d = [0, 11]
[12, 56, 72, 96, 100], d = [1, 11]
n = 61:
[22, 120, 122], d = [0, 1]
[47, 61, 74, 122], d = [0, 3]
[22, 47, 61, 74, 120], d = [1, 3]
n = 62:
[4, 31, 119, 124], d = [0, 15]
[26, 62, 92, 124], d = [0, 3]
[4, 26, 31, 62, 92, 119], d = [3, 15]
n = 63:
[14, 36, 116, 126], d = [0, 5]
[36, 66, 84, 126], d = [0, 5]
[18, 63, 99, 126], d = [0, 3]
[14, 18, 36, 63, 99, 116], d = [3, 5]
[18, 36, 63, 66, 84, 99], d = [3, 5]
n = 64:
[7, 32, 122, 128], d = [0, 15]
[32, 68, 88, 128], d = [0, 15]
[16, 72, 96, 128], d = [0, 7]
[7, 16, 32, 72, 96, 122], d = [7, 15]
[16, 32, 68, 72, 88, 96], d = [7, 15]
n = 65:
[32, 126, 130], d = [0, 1]
[50, 120, 130], d = [0, 1]
[66, 112, 130], d = [0, 1]
[78, 104, 130], d = [0, 1]
[32, 50, 104, 130], d = [0, 1]
[50, 66, 78, 130], d = [0, 1]
[5, 65, 110, 130], d = [0, 3]
[5, 32, 65, 110, 126], d = [1, 3]
[5, 50, 65, 110, 120], d = [1, 3]
[5, 65, 66, 110, 112], d = [1, 3]
[5, 65, 78, 104, 110], d = [1, 3]
[5, 32, 50, 65, 104, 110], d = [1, 3]
[5, 50, 65, 66, 78, 110], d = [1, 3]
n = 66:

```

[22, 78, 92, 132], d = [0, 35]
 [36, 57, 99, 132], d = [0, 7]
 [44, 68, 84, 132], d = [0, 2]
 [22, 36, 57, 78, 92, 99], d = [7, 35]
 [22, 44, 68, 78, 84, 92], d = [2, 35]
 [36, 44, 57, 68, 84, 99], d = [2, 7]
 n = 67:
 [13, 67, 109, 134], d = [0, 3]
 n = 68:
 [64, 120, 136], d = [0, 1]
 [11, 56, 119, 136], d = [0, 15]
 [34, 56, 106, 136], d = [0, 15]
 [26, 51, 114, 136], d = [0, 55]
 [11, 56, 64, 119, 120], d = [1, 15]
 [34, 56, 64, 106, 120], d = [1, 15]
 [26, 51, 64, 114, 120], d = [1, 55]
 [11, 26, 51, 56, 114, 119], d = [15, 55]
 [26, 34, 51, 56, 106, 114], d = [15, 55]
 n = 70:
 [84, 112, 140], d = [0, 1]
 [12, 50, 126, 140], d = [0, 19]
 [15, 77, 108, 140], d = [0, 31]
 [20, 70, 110, 140], d = [0, 3]
 [28, 76, 100, 140], d = [0, 6]
 [12, 50, 84, 112, 126], d = [1, 19]
 [15, 77, 84, 108, 112], d = [1, 31]
 [20, 70, 84, 110, 112], d = [1, 3]
 [28, 76, 84, 100, 112], d = [1, 6]
 [12, 15, 50, 77, 108, 126], d = [19, 31]
 [12, 20, 50, 70, 110, 126], d = [3, 19]
 [15, 20, 70, 77, 108, 110], d = [3, 31]
 [20, 28, 70, 76, 100, 110], d = [3, 6]
 [12, 28, 50, 76, 100, 126], d = [6, 19]
 [15, 28, 76, 77, 100, 108], d = [6, 31]
 n = 72:
 [6, 52, 132, 144], d = [0, 23]
 [52, 63, 98, 144], d = [0, 23]
 [18, 81, 108, 144], d = [0, 7]

$[6, 18, 52, 81, 108, 132], d = [7, 23]$
 $[18, 52, 63, 81, 98, 108], d = [7, 23]$
 $n = 73:$
 $[96, 110, 146], d = [0, 1]$
 $[46, 73, 97, 146], d = [0, 3]$
 $[46, 73, 96, 97, 110], d = [1, 3]$
 $n = 74:$
 $[48, 140, 148], d = [0, 1]$
 $[27, 76, 111, 148], d = [0, 7]$
 $[52, 74, 94, 148], d = [0, 3]$
 $[27, 48, 76, 111, 140], d = [1, 7]$
 $[48, 52, 74, 94, 140], d = [1, 3]$
 $[27, 52, 74, 76, 94, 111], d = [3, 7]$
 $n = 75:$
 $[42, 144, 150], d = [0, 1]$
 $[90, 120, 150], d = [0, 1]$
 $[10, 66, 130, 150], d = [0, 14]$
 $[15, 70, 125, 150], d = [0, 11]$
 $[15, 95, 106, 150], d = [0, 11]$
 $[10, 42, 66, 130, 144], d = [1, 14]$
 $[10, 66, 90, 120, 130], d = [1, 14]$
 $[15, 42, 70, 125, 144], d = [1, 11]$
 $[15, 42, 95, 106, 144], d = [1, 11]$
 $[15, 70, 90, 120, 125], d = [1, 11]$
 $[15, 90, 95, 106, 120], d = [1, 11]$
 $[10, 15, 66, 70, 125, 130], d = [11, 14]$
 $[10, 15, 66, 95, 106, 130], d = [11, 14]$
 $n = 76:$
 $[17, 38, 142, 152], d = [0, 15]$
 $[38, 88, 98, 152], d = [0, 15]$
 $[44, 76, 104, 152], d = [0, 3]$
 $[17, 38, 44, 76, 104, 142], d = [3, 15]$
 $[38, 44, 76, 88, 98, 104], d = [3, 15]$
 $n = 77:$
 $[11, 89, 119, 154], d = [0, 195]$
 $[21, 55, 135, 154], d = [0, 19]$
 $[22, 77, 121, 154], d = [0, 3]$
 $[26, 66, 126, 154], d = [0, 10]$

[28, 54, 132, 154], d = [0, 13]
 [46, 70, 110, 154], d = [0, 6]
 [11, 21, 55, 89, 119, 135], d = [19, 195]
 [11, 22, 77, 89, 119, 121], d = [3, 195]
 [21, 22, 55, 77, 121, 135], d = [3, 19]
 [22, 26, 66, 77, 121, 126], d = [3, 10]
 [22, 28, 54, 77, 121, 132], d = [3, 13]
 [22, 46, 70, 77, 110, 121], d = [3, 6]
 [11, 26, 66, 89, 119, 126], d = [10, 195]
 [21, 26, 55, 66, 126, 135], d = [10, 19]
 [26, 28, 54, 66, 126, 132], d = [10, 13]
 [11, 28, 54, 89, 119, 132], d = [13, 195]
 [21, 28, 54, 55, 132, 135], d = [13, 19]
 [11, 46, 70, 89, 110, 119], d = [6, 195]
 [21, 46, 55, 70, 110, 135], d = [6, 19]
 [26, 46, 66, 70, 110, 126], d = [6, 10]
 [28, 46, 54, 70, 110, 132], d = [6, 13]
 n = 78:
 [60, 144, 156], d = [0, 1]
 [6, 78, 132, 156], d = [0, 3]
 [26, 86, 114, 156], d = [0, 35]
 [6, 60, 78, 132, 144], d = [1, 3]
 [26, 60, 86, 114, 144], d = [1, 35]
 [6, 26, 78, 86, 114, 132], d = [3, 35]
 n = 79:
 [11, 79, 131, 158], d = [0, 3]
 n = 80:
 [96, 128, 160], d = [0, 1]
 [25, 62, 136, 160], d = [0, 111]
 [50, 83, 104, 160], d = [0, 231]
 [35, 56, 134, 160], d = [0, 39]
 [56, 82, 100, 160], d = [0, 39]
 [40, 85, 110, 160], d = [0, 15]
 [20, 90, 120, 160], d = [0, 7]
 [25, 62, 96, 128, 136], d = [1, 111]
 [50, 83, 96, 104, 128], d = [1, 231]
 [35, 56, 96, 128, 134], d = [1, 39]
 [56, 82, 96, 100, 128], d = [1, 39]

[40, 85, 96, 110, 128], d = [1, 15]
 [20, 90, 96, 120, 128], d = [1, 7]
 [20, 25, 62, 90, 120, 136], d = [7, 111]
 [20, 35, 56, 90, 120, 134], d = [7, 39]
 [20, 56, 82, 90, 100, 120], d = [7, 39]
 [20, 40, 85, 90, 110, 120], d = [7, 15]
 [20, 50, 83, 90, 104, 120], d = [7, 231]
 [25, 50, 62, 83, 104, 136], d = [111, 231]
 [25, 35, 56, 62, 134, 136], d = [39, 111]
 [25, 56, 62, 82, 100, 136], d = [39, 111]
 [35, 50, 56, 83, 104, 134], d = [39, 231]
 [50, 56, 82, 83, 100, 104], d = [39, 231]
 [25, 40, 62, 85, 110, 136], d = [15, 111]
 [35, 40, 56, 85, 110, 134], d = [15, 39]
 [40, 56, 82, 85, 100, 110], d = [15, 39]
 [40, 50, 83, 85, 104, 110], d = [15, 231]

n = 81:

[27, 78, 127, 162], d = [0, 35]
 [30, 63, 135, 162], d = [0, 11]
 [34, 54, 138, 162], d = [0, 2]
 [27, 30, 63, 78, 127, 135], d = [11, 35]
 [27, 34, 54, 78, 127, 138], d = [2, 35]
 [30, 34, 54, 63, 135, 138], d = [2, 11]

n = 82:

[36, 160, 164], d = [0, 1]

n = 84:

[24, 84, 132, 168], d = [0, 3]
 [48, 88, 112, 168], d = [0, 5]
 [24, 48, 84, 88, 112, 132], d = [3, 5]

n = 85:

[26, 168, 170], d = [0, 1]
 [72, 154, 170], d = [0, 1]
 [80, 150, 170], d = [0, 1]
 [102, 136, 170], d = [0, 1]
 [26, 80, 136, 170], d = [0, 1]
 [72, 80, 102, 170], d = [0, 1]
 [68, 86, 100, 170], d = [0, 21]
 [26, 68, 86, 100, 168], d = [1, 21]

```

[68, 72, 86, 100, 154], d = [1, 21]
[68, 80, 86, 100, 150], d = [1, 21]
[68, 86, 100, 102, 136], d = [1, 21]
[26, 68, 80, 86, 100, 136], d = [1, 21]
[68, 72, 80, 86, 100, 102], d = [1, 21]
n = 86:
[44, 86, 122, 172], d = [0, 3]
n = 87:
[120, 126, 174], d = [0, 1]
[29, 69, 146, 174], d = [0, 35]
[66, 76, 116, 174], d = [0, 5]
[29, 69, 120, 126, 146], d = [1, 35]
[66, 76, 116, 120, 126], d = [1, 5]
[29, 66, 69, 76, 116, 146], d = [5, 35]
n = 88:
[20, 110, 124, 176], d = [0, 39]
[22, 48, 162, 176], d = [0, 7]
[22, 76, 148, 176], d = [0, 7]
[22, 99, 132, 176], d = [0, 7]
[48, 76, 132, 176], d = [0, 7]
[48, 99, 113, 176], d = [0, 7]
[20, 22, 48, 110, 124, 162], d = [7, 39]
[20, 22, 76, 110, 124, 148], d = [7, 39]
[20, 22, 99, 110, 124, 132], d = [7, 39]
[20, 48, 76, 110, 124, 132], d = [7, 39]
[20, 48, 99, 110, 113, 124], d = [7, 39]
n = 89:
[78, 160, 178], d = [0, 1]
n = 90:
[108, 144, 180], d = [0, 1]
[18, 70, 158, 180], d = [0, 11]
[18, 84, 150, 180], d = [0, 11]
[70, 84, 114, 180], d = [0, 11]
[18, 70, 108, 144, 158], d = [1, 11]
[18, 84, 108, 144, 150], d = [1, 11]
[70, 84, 108, 114, 144], d = [1, 11]
n = 91:
[70, 168, 182], d = [0, 1]

```

[7, 26, 179, 182], d = [0, 3]
 [7, 61, 169, 182], d = [0, 3]
 [7, 91, 154, 182], d = [0, 3]
 [7, 107, 143, 182], d = [0, 3]
 [26, 61, 161, 182], d = [0, 3]
 [26, 74, 154, 182], d = [0, 3]
 [26, 91, 143, 182], d = [0, 3]
 [61, 91, 118, 182], d = [0, 3]
 [74, 91, 107, 182], d = [0, 3]
 [42, 78, 142, 182], d = [0, 10]
 [7, 26, 70, 168, 179], d = [1, 3]
 [7, 61, 70, 168, 169], d = [1, 3]
 [7, 70, 91, 154, 168], d = [1, 3]
 [7, 70, 107, 143, 168], d = [1, 3]
 [26, 61, 70, 161, 168], d = [1, 3]
 [26, 70, 74, 154, 168], d = [1, 3]
 [26, 70, 91, 143, 168], d = [1, 3]
 [61, 70, 91, 118, 168], d = [1, 3]
 [70, 74, 91, 107, 168], d = [1, 3]
 [42, 70, 78, 142, 168], d = [1, 10]
 [7, 26, 61, 74, 107, 182], d = [0, 3]
 [7, 26, 42, 78, 142, 179], d = [3, 10]
 [7, 42, 61, 78, 142, 169], d = [3, 10]
 [7, 42, 78, 91, 142, 154], d = [3, 10]
 [7, 42, 78, 107, 142, 143], d = [3, 10]
 [26, 42, 61, 78, 142, 161], d = [3, 10]
 [26, 42, 74, 78, 142, 154], d = [3, 10]
 [26, 42, 78, 91, 142, 143], d = [3, 10]
 [42, 61, 78, 91, 118, 142], d = [3, 10]
 [42, 74, 78, 91, 107, 142], d = [3, 10]
 [7, 26, 61, 70, 74, 107, 168], d = [1, 3]
 [7, 26, 42, 61, 74, 78, 107, 142], d = [3, 10]
 n = 92:
 [23, 58, 166, 184], d = [0, 7]
 [23, 72, 159, 184], d = [0, 7]
 [58, 72, 138, 184], d = [0, 7]
 [46, 59, 154, 184], d = [0, 15]
 [46, 86, 136, 184], d = [0, 15]

[23, 46, 58, 59, 154, 166], d = [7, 15]
 [23, 46, 58, 86, 136, 166], d = [7, 15]
 [23, 46, 59, 72, 154, 159], d = [7, 15]
 [23, 46, 72, 86, 136, 159], d = [7, 15]
 [46, 58, 59, 72, 138, 154], d = [7, 15]
 [46, 58, 72, 86, 136, 138], d = [7, 15]
 n = 93:
 [39, 93, 138, 186], d = [0, 3]
 n = 94:
 [28, 47, 173, 188], d = [0, 15]
 n = 95:
 [114, 152, 190], d = [0, 1]
 [57, 99, 125, 190], d = [0, 91]
 [65, 82, 133, 190], d = [0, 51]
 [50, 76, 148, 190], d = [0, 21]
 [55, 95, 130, 190], d = [0, 3]
 [57, 99, 114, 125, 152], d = [1, 91]
 [65, 82, 114, 133, 152], d = [1, 51]
 [50, 76, 114, 148, 152], d = [1, 21]
 [55, 95, 114, 130, 152], d = [1, 3]
 [50, 57, 76, 99, 125, 148], d = [21, 91]
 [50, 65, 76, 82, 133, 148], d = [21, 51]
 [50, 55, 76, 95, 130, 148], d = [3, 21]
 [55, 57, 95, 99, 125, 130], d = [3, 91]
 [55, 65, 82, 95, 130, 133], d = [3, 51]
 [57, 65, 82, 99, 125, 133], d = [51, 91]
 n = 96:
 [4, 51, 184, 192], d = [0, 47]
 [16, 94, 159, 192], d = [0, 143]
 [78, 97, 112, 192], d = [0, 95]
 [8, 84, 169, 192], d = [0, 23]
 [24, 108, 144, 192], d = [0, 7]
 [48, 102, 132, 192], d = [0, 15]
 [4, 16, 51, 94, 159, 184], d = [47, 143]
 [4, 51, 78, 97, 112, 184], d = [47, 95]
 [4, 8, 51, 84, 169, 184], d = [23, 47]
 [8, 16, 84, 94, 159, 169], d = [23, 143]
 [8, 78, 84, 97, 112, 169], d = [23, 95]

```

[4, 24, 51, 108, 144, 184], d = [7, 47]
[8, 24, 84, 108, 144, 169], d = [7, 23]
[16, 24, 94, 108, 144, 159], d = [7, 143]
[24, 48, 102, 108, 132, 144], d = [7, 15]
[24, 78, 97, 108, 112, 144], d = [7, 95]
[4, 48, 51, 102, 132, 184], d = [15, 47]
[8, 48, 84, 102, 132, 169], d = [15, 23]
[16, 48, 94, 102, 132, 159], d = [15, 143]
[48, 78, 97, 102, 112, 132], d = [15, 95]
[16, 78, 94, 97, 112, 159], d = [95, 143]
n = 97:
[130, 144, 194], d = [0, 1]
[2, 97, 167, 194], d = [0, 3]
[2, 97, 130, 144, 167], d = [1, 3]
n = 98:
[28, 46, 182, 196], d = [0, 3]
[28, 98, 154, 196], d = [0, 3]
[46, 98, 142, 196], d = [0, 3]
n = 99:
[2, 66, 186, 198], d = [0, 2]
[66, 102, 126, 198], d = [0, 2]
[33, 58, 177, 198], d = [0, 35]
[33, 117, 138, 198], d = [0, 35]
[2, 33, 58, 66, 177, 186], d = [2, 35]
[2, 33, 66, 117, 138, 186], d = [2, 35]
[33, 58, 66, 102, 126, 177], d = [2, 35]
[33, 66, 102, 117, 126, 138], d = [2, 35]
n = 100:
[56, 192, 200], d = [0, 1]
[120, 160, 200], d = [0, 1]
[8, 125, 151, 200], d = [0, 39]
[45, 110, 138, 200], d = [0, 31]
[8, 56, 125, 151, 192], d = [1, 39]
[8, 120, 125, 151, 160], d = [1, 39]
[45, 56, 110, 138, 192], d = [1, 31]
[45, 110, 120, 138, 160], d = [1, 31]
[8, 45, 110, 125, 138, 151], d = [31, 39]

```

Ссылки

- [1] Гуляев Г. М. Целочисленные циклические многоугольники, вписанные в окружность с целым радиусом // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-134224>.
- [2] Гуляев Г. М., Сфенические числа и целочисленные ломаные вписанные в полуокружность // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-135924>.
- [3] Besicovitch, A. S. On the linear independence of fractional powers of integers // Journal of the London Mathematical Society. — 1940. — Vol. 15. — P. 3–6.
- [4] Лежен Дирихле, П. Г. Лекции по теории чисел. // Под ред. Р. Дедекинда. — М.: ОНТИ, 1936.