УДК 511.5

Отсутствие примарных нечётных рёбер в примитивных кубоидах Эйлера

В. Г. Соловьёв (г. Москва)

Аннотация

В настоящей работе исследуется классическая диофантова задача о существовании примитивных кубоидов Эйлера — прямоугольных параллелепипедов с взаимно простыми целочисленными рёбрами и целочисленными лицевыми диагоналями. Хотя сам факт невозможности примарного нечётного ребра известен из классических результатов о минимальных простых делителях и квадратичных вычетах, в данной статье предлагается новое, полностью элементарное и конструктивное доказательство для нечётного примарного ребра вида p^n ($p > 2$ — простое число, $n \geq 2$), основанное на едином аналитическом методе параметризации делителей. Непосредственно из системы уравнений кубоида Эйлера выведено характеристическое уравнение, получена его каноническая параметризация, строго доказаны границы изменения индексных параметров и установлено отсутствие решений в целых числах. В совокупности с ранее полученным результатом для $n = 1$ это полностью закрывает класс примарных нечётных рёбер в рамках единого метода.

Ключевые слова: кубоид Эйлера, диофантовы уравнения, примарные числа, пифагоровы тройки, сравнения по модулю, основная теорема арифметики.

1 Введение и связь с системой уравнений кубоида Эйлера

Определение 1. *Кубоидом Эйлера* называется прямоугольный параллелепипед с целочисленными длинами рёбер $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{N}$ и целочисленными длинами всех трёх лицевых диагоналей $d_{ab}, d_{ac}, d_{bc} \in \mathbb{N}$, удовлетворяющими системе диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} a_0^2 + b_0^2 = d_{ab}^2, \\ a_0^2 + c_0^2 = d_{ac}^2, \\ b_0^2 + c_0^2 = d_{bc}^2. \end{cases} \tag{1}$$

Кубоид Эйлера называется *примитивным*, если $\gcd(a_0, b_0, c_0) = 1$.

Задача описания всех целочисленных кубоидов Эйлера и тесно связанная с ней проблема существования совершенного кубоида (обладающего также целочисленной пространственной диагональю) относятся к числу классических открытых проблем диофантова анализа [7, 5, 4, 6]. Как следует из анализа сравнений по модулю 4 и свойств примитивных пифагоровых троек [2, 1], в любом примитивном кубоиде Эйлера ровно одно ребро нечётно, а два других — чётны. В классической теории кубоидов Эйлера (см., например, [7, 5, 4]) известно, что нечётное ребро примитивного кубоида не может являться степенью простого числа, поскольку оно должно

содержать как минимум два различных простых делителя, удовлетворяющих определённым условиям квадратичных вычетов.

Научная новизна настоящей работы заключается в построении нового, полностью элементарного и конструктивного доказательства этого факта в рамках единого аналитического метода параметризации делителей, развитого автором ранее в [3]. В работе [3] указанным методом было доказано отсутствие решений при простом нечётном ребре $a_0 = p$ ($n = 1$) и получена полная классификация нечётных полупростых рёбер $a_0 = p_1 p_2$. Ниже данный метод распространяется на произвольные высшие степени нечётного простого числа $a_0 = p^n$ ($n \geq 2$).

Пусть нечётное ребро примитивного кубоида Эйлера равно $a_0 = p^n$, где $p > 2$ — простое число и $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 2$), а чётные рёбра равны b_0 и c_0. Из первых двух уравнений системы (1) имеем:

$$p^{2n} = (d_{ab} - b_0)(d_{ab} + b_0), \qquad p^{2n} = (d_{ac} - c_0)(d_{ac} + c_0).$$

Поскольку $a_0 = p^n$ нечётно, а b_0, c_0 чётны, числа d_{ab} и d_{ac} нечётны, откуда $\gcd(d_{ab} - b_0, d_{ab} + b_0) = 1$ и $\gcd(d_{ac} - c_0, d_{ac} + c_0) = 1$. В силу основной теоремы арифметики [1] единственным разложением степени простого числа p^{2n} на два взаимно простых натуральных множителя, меньший из которых строго меньше $\sqrt{p^{2n}} = p^n$, является разложение $f_i \cdot \frac{p^{2n}}{f_i}$, где $f_i \in A = \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$ ($i = 1, 2$). Следовательно,

$$b_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^{2n}}{f_1} - f_1\right), \qquad c_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^{2n}}{f_2} - f_2\right).$$

Кроме того, если $f_1 = f_2$, то $b_0 = c_0$, что противоречит третьему уравнению системы (1) ($2b_0^2 = d_{bc}^2$ не имеет решений в натуральных числах). Подставляя найденные выражения для b_0 и c_0 в уравнение $b_0^2 + c_0^2 = d_{bc}^2$ и умножая на 4, получаем характеристическое диофантово уравнение кубоида Эйлера с примарным нечётным ребром p^n:

$$\left(\frac{p^{2n}}{f_1} - f_1\right)^2 + \left(\frac{p^{2n}}{f_2} - f_2\right)^2 = M^2, \tag{2}$$

где $M = 2d_{bc} \in \mathbb{N}$, а $f_1, f_2 \in A = \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$ и $f_1 \neq f_2$.

2 Основная теорема и параметризация

Теорема 1. *Примитивного кубоида Эйлера, нечётное ребро которого имеет вид степени нечётного простого числа p^n, где $p > 2$ — простое число и $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 2$), не существует. Иными словами, для любых простого $p \geq 3$ и целого $n \geq 2$ уравнение (2) не имеет решений в целых числах $M \in \mathbb{Z}$ при любых $f_1, f_2 \in \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$, удовлетворяющих условию $f_1 \neq f_2$.*

Следствие 1. *Объединяя Теорему 1 (случай $n \geq 2$) с результатом работы [3] (случай $n = 1$), заключаем, что ни при каком $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$) и ни при каком нечётном простом $p > 2$ число p^n не может являться нечётным ребром примитивного кубоида Эйлера.*

2.1 Каноническая параметризация и область индексов

Лемма 1 (Каноническая параметризация)**.** *Представим элементы* $f_1, f_2 \in A = \{1, p, p^2, \ldots, p^{n-1}\}$ *в виде степеней простого числа* p*:* $f_1 = p^a$ *и* $f_2 = p^b$*, где* $a, b \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*. Тогда левая часть уравнения* (2) *тождественно равна*

$$S(n, a, b) = p^{2a}\left(p^{2(n-a)} - 1\right)^2 + p^{2b}\left(p^{2(n-b)} - 1\right)^2. \tag{3}$$

Доказательство. Выполним тождественные алгебраические преобразования для каждого слагаемого в левой части (2) независимо:

1. **Преобразование первого слагаемого:** Подставляя $f_1 = p^a$, имеем:

$$\frac{p^{2n}}{f_1} - f_1 = \frac{p^{2n}}{p^a} - p^a = p^{2n-a} - p^a.$$

   Поскольку $a \leq n-1$, выполняется $2n - 2a = 2(n-a) \geq 2 > 0$. Вынося общий множитель p^a за скобки, получаем:

$$p^{2n-a} - p^a = p^a\left(p^{2n-2a} - 1\right) = p^a\left(p^{2(n-a)} - 1\right).$$

   Возводя обе части полученного равенства в квадрат, находим:

$$\left(\frac{p^{2n}}{f_1} - f_1\right)^2 = \left[p^a\left(p^{2(n-a)} - 1\right)\right]^2 = p^{2a}\left(p^{2(n-a)} - 1\right)^2.$$

2. **Преобразование второго слагаемого:** Ввиду симметрии структуры относительно замены $f_1 \to f_2$ (что эквивалентно замене показателя $a \to b$), второе слагаемое преобразуется аналогично:

$$\left(\frac{p^{2n}}{f_2} - f_2\right)^2 = p^{2b}\left(p^{2(n-b)} - 1\right)^2.$$

Суммируя оба выражения, получаем формулу (3). □

Лемма 2 (Область изменения индексных параметров)**.** *Для полного и безызбыточного перебора всех неупорядоченных пар различных элементов* $\{f_1, f_2\} \subset A$ *показатели* a *и* b *без ограничения общности удовлетворяют системе условий:*

$$a, b \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq a < b \leq n-1, \tag{4}$$

что эквивалентно записи $a \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ *и* $b \in \{a+1, a+2, \ldots, n-1\}$*.*

Доказательство.

1. **Исключение совпадения элементов** ($a \neq b$)**:** По условию Теоремы 1 выполняется $f_1 \neq f_2$, то есть $p^a \neq p^b$. Поскольку $p > 2$, отображение $k \mapsto p^k$ инъективно на $\mathbb{Z}$, откуда $a \neq b$.

2. **Исключение дублирования симметричных пар** ($a < b$)**:** Функция $S(n, a, b)$ симметрична относительно перестановки аргументов: $S(n, a, b) = S(n, b, a)$. Чтобы учесть каждую неупорядоченную пару $\{f_1, f_2\}$ ровно один раз, введём строгое линейное упорядочивание $a < b$. Для целых чисел неравенство $a < b$ равносильно условию $b \geq a + 1$.

3. **Определение граничных значений:** Так как $f_1, f_2 \in A = \{1, p, \ldots, p^{n-1}\}$, оба показателя принадлежат отрезку $[0, n-1] \cap \mathbb{Z}$. Объединяя это с условием $a < b$, получаем $0 \le a < b \le n-1$. Из $a+1 \le b \le n-1$ непосредственно вытекает $a \le n-2$. При $n \ge 2$ множество $\{0, 1, \ldots, n-2\}$ непусто, а для каждого допустимого a множество $\{a+1, \ldots, n-1\}$ также непусто.

Таким образом, условия (4) полностью обоснованы. □

3 Доказательство неразрешимости редуцированного уравнения

Лемма 3 (Редукция степеней простого числа)**.** *Уравнение $S(n,a,b) = M^2$ разрешимо в целых числах $M \in \mathbb{Z}$ при условиях (4) тогда и только тогда, когда существуют натуральные числа $x, d, K \in \mathbb{N}$ ($x \ge 1, d \ge 1$) такие, что для $u = p^x$ и $v = p^d$ выполняется уравнение*

$$K^2 = \left(u^2v^2 - 1\right)^2 + v^2\left(u^2 - 1\right)^2 = u^4v^4 + u^4v^2 - 4u^2v^2 + v^2 + 1, \tag{5}$$

где $u, v \ge 3$ — нечётные степени простого числа p.

Доказательство. Предположим, что $S(n,a,b) = M^2$ для некоторого $M \in \mathbb{Z}$. Из (4) следует $n-a > n-b \ge 1$, поэтому оба слагаемых в (3) строго положительны. Следовательно, $S(n,a,b) > 0$ и $M \ne 0$. Поскольку M входит в уравнение только во второй степени, без ограничения общности полагаем $M \in \mathbb{N}$. Так как $b-a \ge 1$, вынесем p^{2a} за скобки в левой части равенства $S(n,a,b) = M^2$:

$$p^{2a}\left[\left(p^{2(n-a)} - 1\right)^2 + p^{2(b-a)}\left(p^{2(n-b)} - 1\right)^2\right] = M^2.$$

Выражение в квадратных скобках является натуральным числом, значит M^2 делится на p^{2a}. В силу основной теоремы арифметики (так как p — простое число) p-адическое нормирование удовлетворяет соотношению $\nu_p(M^2) = 2\nu_p(M) \ge 2a$, откуда $\nu_p(M) \ge a$, то есть M делится на p^a. Полагая $M = p^aK$ ($K \in \mathbb{N}$) и сокращая обе части на $p^{2a} \ne 0$, получаем: $\left(p^{2(n-a)} - 1\right)^2 + p^{2(b-a)}\left(p^{2(n-b)} - 1\right)^2 = K^2$. Введём натуральные показатели $x = n-b \ge 1$ и $d = b-a \ge 1$, тогда $n-a = x+d$. Обозначая $u = p^x$ и $v = p^d$, имеем $p^{2x} = u^2$, $p^{2d} = v^2$ и $p^{2(n-a)} = u^2v^2$. Так как $p \ge 3$ нечётно и $x, d \ge 1$, числа u и v нечётны и $u, v \ge 3$. Раскрывая скобки, находим:

$$\begin{aligned} K^2 &= \left(u^4v^4 - 2u^2v^2 + 1\right) + v^2\left(u^4 - 2u^2 + 1\right) \\ &= u^4v^4 + u^4v^2 - 4u^2v^2 + v^2 + 1, \end{aligned}$$

что доказывает (5). □

Лемма 4 (Неразрешимость при $d \ge x$)**.** *При $d \ge x \ge 1$ уравнение (5) не имеет решений в натуральных числах $K \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. При $d \ge x \ge 1$ выполняется $v = p^d \ge p^x = u \ge 3$. Так как u нечётно, $u^2 - 3$ делится на 2, и число

$$L = u^2v^2 + \frac{u^2 - 3}{2}$$

является целым. Более того, при $u \ge 3$ имеем $\frac{u^2-3}{2} \ge 3 > 0$, откуда $L \in \mathbb{N}$ и $L-1 \in \mathbb{N}$.

Покажем, что K^2 строго заключено между квадратами последовательных натуральных чисел $L-1$ и L. Вычислим L^2 и $(L-1)^2$:

$$\begin{aligned} L^2 &= \left(u^2v^2 + \frac{u^2-3}{2}\right)^2 \\ &= u^4v^4 + u^4v^2 - 3u^2v^2 + \frac{u^4-6u^2+9}{4}, \\ (L-1)^2 &= \left(u^2v^2 + \frac{u^2-5}{2}\right)^2 \\ &= u^4v^4 + u^4v^2 - 5u^2v^2 + \frac{u^4-10u^2+25}{4}. \end{aligned}$$

1. Вычитая (5) из L^2 и используя $u \geq 3, v \geq 3$, получаем:

$$\begin{aligned} L^2 - K^2 &= u^2v^2 - v^2 - 1 + \frac{(u^2-3)^2}{4} \\ &= v^2(u^2-1) - 1 + \frac{(u^2-3)^2}{4} \\ &\geq 9 \cdot 8 - 1 + 9 = 80 > 0, \end{aligned}$$

значит, $K^2 < L^2$.

2. Вычитая $(L-1)^2$ из (5) и учитывая $v \geq u \geq 3$ (откуда $u^2v^2 \geq u^4$), находим:

$$\begin{aligned} K^2 - (L-1)^2 &= u^2v^2 + v^2 + 1 - \frac{u^4-10u^2+25}{4} \\ &= \left(u^2v^2 - \frac{u^4}{4}\right) + v^2 + \frac{10u^2-21}{4} \\ &\geq \frac{3u^4}{4} + 9 + \frac{69}{4} > 0, \end{aligned}$$

значит, $(L-1)^2 < K^2$.

Из $(L-1)^2 < K^2 < L^2$ для натуральных чисел следует $L-1 < K < L$, что невозможно для целого числа K. □

Лемма 5 (Неразрешимость при $d < x$)**.** *При $1 \leq d < x$ уравнение (5) не имеет решений в натуральных числах $K \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Предположим противное, что решение $K \in \mathbb{N}$ существует при $1 \leq d < x$. Положим $q = \frac{u}{v} = p^{x-d}$. Так как $x - d \geq 1$ и $p \geq 3$, справедливы неравенства:

$$v = p^d \geq 3, \qquad q = p^{x-d} \geq 3, \qquad u = qv \geq 3v \geq 9,$$

причём $u^2 = q^2v^2$ делится нацело на v^2.

Этап 1. Введение параметра r и его верхняя оценка.
Умножим (5) на 4 и рассмотрим натуральное число $W = 2u^2v^2 + u^2 - 4$ (так как $u \geq 9$, то $u^2 - 4 \geq 77 > 0$):

$$4K^2 = 4u^4v^4 + 4u^4v^2 - 16u^2v^2 + 4v^2 + 4,$$

$$W^2 = 4u^4v^4 + 4u^4v^2 - 16u^2v^2 + (u^2-4)^2.$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем:

$$W^2 - 4K^2 = (u^2-4)^2 - 4v^2 - 4. \tag{6}$$

Поскольку $u \geq 3v \geq 9$, имеем $u^2 - 4 \geq 9v^2 - 4 > 2v + 2 > 0$, откуда $(u^2-4)^2 > (2v+2)^2 > 4v^2 + 4$. Следовательно, $W^2 > (2K)^2$, то есть $W > 2K > 0$.

Введём натуральное число $r = W - 2K \in \mathbb{N}$ ($r \geq 1$). Подставляя $2K = W - r$ в (6), находим:

$$2Wr - r^2 = (u^2-4)^2 - 4v^2 - 4.$$

Заменяя $W = 2u^2v^2 + u^2 - 4$ и выделяя $r^2 + 8r + 12 = (r+2)(r+6)$, получаем тождество:

$$(r+2)(r+6) = u^2\left(u^2 - 8 - 4rv^2 - 2r\right) + 4v^2. \tag{7}$$

Покажем, что множитель $C = u^2 - 8 - 4rv^2 - 2r$ строго положителен ($C \geq 1$):

- Если $C \leq -1$, то правая часть (7) не превосходит $-u^2 + 4v^2 \leq -9v^2 + 4v^2 = -5v^2 < 0$, тогда как левая часть $(r+2)(r+6) \geq 21 > 0$ — противоречие.
- Если $C = 0$, то $u^2 - 8 = 2r(2v^2+1)$, что невозможно, так как $u^2 = p^{2x}$ делится на нечётное простое $p \geq 3$, а 8 на p не делится.

Следовательно, $C \geq 1$, откуда:

$$4rv^2 + 2r \leq u^2 - 9 < u^2 \implies r < \frac{u^2}{4v^2} = \frac{q^2}{4}. \tag{8}$$

Этап 2. Сравнения по модулям v^2 и u^2.
В правой части (7) оба слагаемых кратны v^2, а левая часть положительна, поэтому существует $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 1$) такое, что:

$$(r+2)(r+6) = k \cdot v^2. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), перенося $4v^2$ влево и деля на $v^2 \neq 0$, получаем:

$$\begin{aligned}(k-4)v^2 &= u^2\left(u^2 - 8 - 4rv^2 - 2r\right)\\ &\implies k - 4 = q^2\left(u^2 - 8 - 4rv^2 - 2r\right),\end{aligned}$$

откуда следует сравнение:

$$k \equiv 4 \pmod{q^2}. \tag{10}$$

Так как $k \geq 1$ и $q^2 \geq 9 > 4$, из (10) вытекает, что либо $k = 4$, либо $k \geq q^2 + 4$.

Этап 3. Невозможность случая $k = 4$.
При $k = 4$ равенство (9) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}(r+2)(r+6) = 4v^2 &\iff (r+4)^2 - (2v)^2 = 4\\ &\iff (r+4-2v)(r+4+2v) = 4.\end{aligned}$$

Разность целых сомножителей $(r+4+2v) - (r+4-2v) = 4v \geq 12$, тогда как наибольшая разность между парными делителями числа 4 равна $4 - 1 = 3 < 12$. Противоречие.

Этап 4. Невозможность случая $k \geq q^2 + 4$.

- При $q = 3$ из (8) следует $r < \frac{9}{4} \implies r \leq 2$, откуда $(r+2)(r+6) \leq 4 \cdot 8 = 32$. Но $k \cdot v^2 \geq (9+4) \cdot 9 = 117 > 32$, что противоречит (9).

- При $q \geq 5$ разность $(r+6) - (r+2) = 4$ взаимно проста с нечётным числом $v = p^d$, поэтому $v^2 = p^{2d}$ целиком делит один из сомножителей $r + c$ ($c \in \{2, 6\}$). Полагая $r + c = sv^2$ ($s \in \mathbb{N}$), получаем второй сомнотель $sv^2 \pm 4$ и равенство $k = s(sv^2 \pm 4) = s^2v^2 \pm 4s$.

  Для $Y = sv^2 = r + c$ при $q \geq 5$ из (8) имеем:

$$Y = r + c < \frac{q^2}{4} + 6 < \frac{q^2}{2}. \tag{11}$$

  Тогда $s = \frac{Y}{v^2} < \frac{q^2}{2v^2}$, и величина k оценивается сверху так:

$$k \leq s(sv^2 + 4) < \frac{q^2}{2v^2}\left(\frac{q^2}{2} + 4\right) = \frac{q^4 + 8q^2}{4v^2}.$$

  Если $q \leq v$, то $k < \frac{q^2}{4} + \frac{2q^2}{v^2} \leq \frac{q^2}{4} + 2 < q^2 + 4$, что противоречит $k \geq q^2 + 4$.

  Если же $q > v$, умножим сравнение $s^2v^2 \pm 4s \equiv 4 \pmod{q^2}$ на v^2:

$$\begin{aligned} Y^2 \pm 4Y &\equiv 4v^2 \pmod{q^2v^2} \\ &\iff (Y \pm 2)^2 \equiv 4(v^2+1) \pmod{q^2v^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

  Докажем по индукции, что $q > v^m$ для любого $m \in \mathbb{N}$:

  1. *База ($m = 1$):* $q > v^1$ выполнено по предположению.
  2. *Шаг индукции:* пусть $q > v^m$ ($m \geq 1$). Тогда $q = p^{x-d}$ делится на $v^m = p^{md}$, а q^2v^2 делится на v^{2m+2}. Из (12) по модулю v^{2m+2} после деления на v^2 имеем $k = s(sv^2 \pm 4) \equiv 4 \pmod{v^{2m}}$. При этом $k \neq 4$ (так как $s \geq 1, v \geq 3$, и единственное значение $s = 1$ со знаком «+» даёт $k = v^2 + 4 < q^2 + 4$, а со знаком «−» даёт $k = v^2 - 4 \not\equiv 4 \pmod{v^2}$), а также $k > 0$. Следовательно,

$$k \geq v^{2m} + 4, \qquad \text{откуда} \qquad Y(Y \pm 4) = kv^2 \geq v^{2m+2} + 4v^2.$$

     Покажем, что отсюда в обоих случаях знака следует $Y > v^{m+1}$:

     - *Случай знака «−»:* так как $Y > 0$, имеем $Y^2 > Y(Y-4) \geq v^{2m+2} + 4v^2 > v^{2m+2}$, откуда $Y > v^{m+1}$.
     - *Случай знака «+» при $m = 1$:* неравенство $Y^2 + 4Y \geq v^4 + 4v^2$ эквивалентно $(Y+2)^2 \geq v^4 + 4v^2 + 4 = (v^2+2)^2$, откуда $Y \geq v^2$. Равенство $Y = v^2$ невозможно, так как тогда $s = 1$ и $k = v^2 + 4 < q^2 + 4$ (поскольку $q > v$). Следовательно, $Y > v^2 = v^{1+1}$.
     - *Случай знака «+» при $m \geq 2$:* предположим от противного, что $Y \leq v^{m+1}$. Поскольку $Y = sv^2$ и $v^{m+1} = v^{m-1} \cdot v^2$ (при $m \geq 2$) оба делятся на v^2, возможны только два подслучая:
       (a) Если $Y = v^{m+1}$, то $k = \frac{v^{m+1}(v^{m+1}+4)}{v^2} = v^{2m} + 4v^{m-1}$. Так как $m \geq 2$ и $v \geq 3$, выполняются неравенства $4 < 4v^{m-1} < v^2 \cdot v^{m-1} = v^{m+1} < v^{2m}$, откуда $0 < 4v^{m-1} - 4 < v^{2m}$. Значит, $k - 4 = v^{2m} + (4v^{m-1} - 4)$ не делится на v^{2m}, что противоречит $k \equiv 4 \pmod{v^{2m}}$.

(b) Если $Y \le v^{m+1} - v^2$, то из $v \ge 3$ следует $v^2 - 4 > 0$, откуда $Y + 4 \le v^{m+1} - (v^2 - 4) < v^{m+1}$. Тогда

$$k = \frac{Y(Y+4)}{v^2} < \frac{(v^{m+1} - v^2)v^{m+1}}{v^2} = v^{2m} - v^{m+1} < v^{2m},$$

что противоречит $k \ge v^{2m} + 4$.

Таким образом, неравенство $Y > v^{m+1}$ выполняется во всех случаях.

Подставляя $Y > v^{m+1}$ в (11), находим $q^2 > 2Y > 2v^{m+1} > v^{m+1}$. Применяя этот переход повторно (к индексу $m+1$), получаем $q^2 > v^{m+2}$, и при $m = 2j - 1$ имеем $q^2 > v^{2j} \implies q > v^j$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Неравенство $q > v^j$, то есть $x - d > j \cdot d$ при всех $j \in \mathbb{N}$, противоречит конечности натуральных чисел x и d.

Противоречие во всех подслучаях завершает доказательство Леммы 5. □

3.1 Завершение доказательства Теоремы 1

Доказательство Теоремы 1. Предположим от противного, что существует примитивный кубоид Эйлера с нечётным ребром p^n ($p \ge 3$, $n \ge 2$). Как показано в Разделе 1, это равносильно существованию различных делителей $f_1, f_2 \in \{1, p, \ldots, p^{n-1}\}$ и целого числа $M \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих уравнению (2).

По Леммам 1, 2 и 3 существование такого решения эквивалентно существованию натуральных чисел $x, d, K \in \mathbb{N}$ ($x \ge 1, d \ge 1$), удовлетворяющих диофантову уравнению (5). Однако для любых $x, d \in \mathbb{N}$ имеет место либо $d \ge x$, либо $d < x$. Согласно Лемме 4 решений не существует при $d \ge x$, а согласно Лемме 5 решений не существует при $d < x$. Полученное противоречие доказывает, что уравнение (2) неразрешимо в целых числах ни при каких допустимых параметрах. Следовательно, примитивного кубоида Эйлера с нечётным ребром вида p^n ($p > 2$, $n \ge 2$) не существует. Теорема 1 полностью доказана. □

Список литературы

[1] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — 9-е изд., перераб. — М.: Наука, 1981. — 176 с.

[2] *Серпинский В.* Пифагоровы треугольники / пер. с польск. под ред. С. И. Зетеля. — М.: Учпедгиз, 1959. — 112 с.

[3] *Соловьёв В. Г.* Ограничения на класс полупростых рёбер примитивных кубоидов Эйлера // Российский открытый архив препринтов arXivorg.ru. — 2026. — Идентификатор AX-136538 (версия v4 от 11.11.2026). — URL: `arxivorg.ru`.

[4] *Guy R. K.* Unsolved Problems in Number Theory. — 3rd ed. — New York: Springer-Verlag, 2004. — 437 p.

[5] *Leech J.* The rational cuboid revisited // The American Mathematical Monthly. — 1977. — Vol. 84, No. 7. — P. 518–533.

[6] *Sharipov R. A.* A note on a perfect Euler cuboid // arXiv preprint. — 2011. — arXiv:1104.1716 [math.NT]. — URL: `arxiv.org`.

[7] *Spohn W. G.* On the integral cuboid // The American Mathematical Monthly. — 1972. — Vol. 79, No. 1. — P. 57–59.

Absence of Primary Odd Edges in Primitive Euler Bricks

V. G. Solovyev (Moscow)

Abstract. This paper investigates the classical Diophantine problem of the existence of primitive Euler bricks — rectangular parallelepipeds with coprime integer edges and integer face diagonals. While the impossibility of a primary odd edge is known from classical results on minimal prime divisors and quadratic residues, this study provides a new, completely elementary and constructive proof for an odd primary edge of the form p^n ($p > 2$ is prime, $n \geq 2$), based on a unified analytical method of divisor parameterization. Directly from the system of Euler brick equations, a characteristic Diophantine equation is derived, its canonical parameterization is obtained, the index bounds for unique pairs of divisors are rigorously established, and the absence of integer solutions is proven. Combined with the earlier result for $n = 1$, this completely rules out the class of primary odd edges within a unified framework.
Keywords: Euler brick, Diophantine equations, primary numbers, Pythagorean triples, modular arithmetic, fundamental theorem of arithmetic. **References**

1. Vinogradov I. M. *Osnovy teorii chisel* [Elements of Number Theory]. 9th ed. Moscow, Nauka Publ., 1981, 176 p. (in Russian).
2. Sierpi'nski W. *Pifagorovy treugol'niki* [Pythagorean Triangles]. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1959, 112 p. (in Russian).
3. Solovyev V. G. Ogranicheniya na klass poluprostykh reber primitivnykh kuboidov Eylera [Constraints on the Class of Semiprime Edges of Primitive Euler Bricks]. *Russian Open Preprint Archive arXivorg.ru*, 2026, ID AX-136538 (v4, 11.11.2026). Available at: `arxivorg.ru` (in Russian).
4. Guy R. K. *Unsolved Problems in Number Theory*. 3rd ed. New York, Springer-Verlag, 2004, 437 p.
5. Leech J. The rational cuboid revisited. *The American Mathematical Monthly*, 1977, vol. 84, no. 7, pp. 518–533.
6. Sharipov R. A. A note on a perfect Euler cuboid. *arXiv preprint*, 2011, arXiv:1104.1716 [math.NT]. Available at: `arxiv.org`.
7. Spohn W. G. On the integral cuboid. *The American Mathematical Monthly*, 1972, vol. 79, no. 1, pp. 57–59.