

Теорема о логарифмическом сдвиге в конечном окне

Геометрическая теорема о сдвигах на ограниченном интервале

Александр Петрович Емельянов

alex.emelyanov@proton.me

Препринт I — версия 1.1, сентябрь 2026

Аннотация

В этой заметке выделяется простой геометрический факт, возникающий при рассмотрении трансляций на конечном интервале. Пусть $I_a = [-a, a]$, а сдвиг с величиной ℓ действует на объект, поддержка которого содержится в I_a . Сдвинутая копия окна пересекает исходное окно тогда и только тогда, когда $|\ell| \leq 2a$. Следовательно, величина $2a$ является точной максимальной величиной смещения, различимой внутри окна. Если смещение параметризуется логарифмически как $\ell = \log p$, то условие видимости принимает вид $p \leq \exp(2a)$. Результат носит чисто геометрический характер: он использует только диаметр интервала и не требует никаких дополнительных аналитических или численных предположений.

1. Мотивация и происхождение постановки

Рассматриваемая здесь задача элементарна, однако сама постановка естественно возникает в математических конструкциях, где трансляции рассматриваются на ограниченном интервале. Один параметр задаёт размер конечного окна, другой — величину смещения. Основной геометрический вопрос состоит в следующем: при каком смещении сдвинутая копия окна ещё может иметь общие точки с исходным окном? [1–3]

Цель настоящей заметки — отделить этот простой вопрос от дополнительных структур, в которых он может возникать, и сформулировать его в наиболее прозрачной форме. Ответ определяется исключительно диаметром окна. После перехода к логарифмической параметризации та же самая геометрия записывается как $p \leq e^{(2a)}$.

Наша задача здесь намеренно ограничена этим фактом. Не требуется ни спектральная теория, ни асимптотический анализ, ни численные вычисления. Всё содержание заметки сводится к точному описанию геометрической достигаемости сдвига на конечном интервале.

2. Конечное окно

Пусть $a > 0$ и определим замкнутый интервал

$$I_a := [-a, a].$$

Его диаметр равен

$$\text{diam}(I_a) = 2a.$$

Пусть S_ℓ обозначает трансляцию на действительное смещение ℓ . Для определённости положим

$$(S_\ell f)(x) := f(x - \ell).$$

Таким образом, единственный рассматриваемый в работе вопрос геометрический: когда сдвинутая копия объекта, поддержка которого находится в I_a , ещё может пересекаться с исходным окном?

3. Пересечение сдвинутого окна

При смещении на ℓ интервал I_a переходит в

$$I_a + \ell = [\ell - a, \ell + a].$$

Область возможного пересечения задаётся поэтому множеством

$$I_a \cap (I_a + \ell).$$

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 1 (теорема о сдвиге в конечном окне)

Пусть $a > 0$ и $\ell \in \mathbb{R}$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $I_a \cap (I_a + \ell) \neq \emptyset$;
- (ii) существуют $x, y \in I_a$ такие, что $y - x = \ell$;
- (iii) $|\ell| \leq 2a$.

Иными словами, смещение различимо внутри окна I_a в точности тогда, когда его абсолютная величина не превосходит диаметра окна.

Доказательство.

Предположим сначала, что $I_a \cap (I_a + \ell)$ непусто. Тогда существует $x \in I_a$ такой, что $x \in I_a + \ell$. Следовательно, $x - \ell \in I_a$. Поэтому обе точки x и $x - \ell$ принадлежат $[-a, a]$, откуда

$$|\ell| = |x - (x - \ell)| \leq \text{diam}(I_a) = 2a.$$

Таким образом, (i) влечёт (iii).

Обратно, предположим, что $|\ell| \leq 2a$. Если $\ell \geq 0$, возьмём $x = a - \ell$ и $y = a$. Тогда $x, y \in [-a, a]$ и $y - x = \ell$. Следовательно, интервалы $[-a, a]$ и $[\ell - a, \ell + a]$ пересекаются. Случай $\ell < 0$ получается отражением относительно начала координат. Значит, (iii) влечёт (i).

Эквивалентность с (ii) — это та же самая геометрическая идея: две точки интервала I_a могут отличаться на величину ℓ тогда и только тогда, когда абсолютная величина этой разности не превосходит диаметра интервала. Теорема доказана. $\square$

4. Логарифмическое смещение

Теперь параметризуем смещение положительной величиной n посредством

$$\ell = \log n, \quad n \geq 1.$$

Поскольку $\log n \geq 0$ при $n \geq 1$, Теорема 1 даёт условие

$$\log n \leq 2a.$$

Строгое возрастание экспоненты позволяет переписать его в эквивалентной форме

$$n \leq e^{(2a)}.$$

Получаем точный закон логарифмической видимости.

Следствие 1 (закон логарифмической видимости)

$$\log n \leq 2a \Leftrightarrow n \leq e^{(2a)}.$$

Никакого приближения здесь нет: граница определяется точно диаметром окна $2a$.

5. Порог открытия

Для каждого $n \geq 1$ введём порог открытия из равенства $\log n = 2a$. Тогда

$$a_n := (1/2) \log n.$$

Имеются три взаимно исключающих случая:

- если $a < a_n$, сдвиг $\log n$ лежит за пределами геометрической досягаемости окна;
- если $a = a_n$, сдвинутое и исходное окна соприкасаются в одной граничной точке;
- если $a > a_n$, два окна пересекаются по непустому интервалу.

Таким образом, каждое логарифмическое смещение становится геометрически доступным ровно при своём пороге a_n .

6. Прямая геометрическая формулировка

Тот же результат можно сформулировать вовсе без операторных обозначений. Две точки $x, y \in [-a, a]$ могут удовлетворять

$$y = x + \ell$$

тогда и только тогда, когда

$$|y - x| \leq 2a.$$

Следовательно, множество всех смещений, реализуемых парами точек внутри окна, есть интервал

$$[-2a, 2a].$$

Поэтому точное множество видимых логарифмических смещений равно

$$\{ \log n : n \geq 1 \text{ и } \log n \leq 2a \}.$$

Это и составляет всё содержание теоремы.

7. Примеры

Закон порога даёт простую шкалу:

$$a = 1: \quad 2a = 2, \quad n_{\max} = e^{(2a)} \approx 7.38906$$

$$a = 1.5: \quad 2a = 3, \quad n_{\max} = e^{(2a)} \approx 20.0855$$

$$a = 2: \quad 2a = 4, \quad n_{\max} = e^{(2a)} \approx 54.5981$$

$$a = 2.5: \quad 2a = 5, \quad n_{\max} = e^{(2a)} \approx 148.413$$

$$a = 3: \quad 2a = 6, \quad n_{\max} = e^{(2a)} \approx 403.429$$

Эти числа приведены только для иллюстрации; сама теорема точна и не зависит от численного вычисления.

8. Область результата

Теорема намеренно ограничена геометрией конечного окна. Для её формулировки не требуется никакой дополнительной структуры. В частности, результат не зависит от выбора базиса, дискретизации, матричного представления, асимптотических предположений или численного метода.

Роль логарифма в этой работе состоит лишь в перепараметризации смещения. Само геометрическое утверждение имеет вид $|\ell| \leq 2a$.

9. Заключение

Конечный интервал радиуса a обладает конечной геометрической достигаемостью, равной его диаметру $2a$. Любое смещение, абсолютная величина которого превышает $2a$, не может соединить две точки этого окна. Если смещения обозначаются логарифмически как $\ell = \log n$, тот же геометрический факт принимает точную форму

$$n \leq e^{(2a)}.$$

Данная теорема составляет полный результат настоящей заметки.

10. Происхождение и литература

Формулировка заметки является самодостаточной. Мотивация к рассмотрению конечных окон в сочетании с параметрами трансляции возникла из более общей математической традиции, связанной с теорией screw functions и родственными задачами продолжения; конечный интервальный контекст, в котором естественно задавать параметр окна, представлен в литературе [1–3]. Теорема 1, однако, является отдельным элементарным геометрическим утверждением и доказывается здесь непосредственно.

Литература

- [1] M. G. Kreĭn and H. Langer, “Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume P_k zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen,” Math. Nachr. 77 (1977), 187–236.
- [2] M. Suzuki, “Aspects of the screw function corresponding to the Riemann zeta-function,” J. London Math. Soc. 108 (2023), 1448–1487. DOI: 10.1112/jlms.12785.
- [3] L. A. Coburn and R. G. Douglas, “Translation operators on the half-line,” Proc. Natl. Acad. Sci. USA 62 (1969), 1010–1013. DOI: 10.1073/pnas.62.4.1010.