

Сфенические числа и целочисленные ломанные вписанные в полуокружность

Георгий Гуляев

31 августа 2026 г.

1. Введение

В моей работе о целочисленных циклических многоугольниках ([1], страницы 19-21) был обнаружен пример окружности с радиусом $r = 1729$, в половину которой можно вписать 33 ломаных, состоящих из семи целочисленных звеньев.

Ближайшие к этому r радиусы окружностей, для которых можно вписать в половину окружности ломаные из семи звеньев с целыми длинами: $r = 1292$ (одна ломаная) и $r = 2024$ (четыре ломаных). То есть, такие случаи достаточно редки.

Число 1729 известно как число-такси или число Рамануджана. Это наименьшее натуральное число, которое можно представить двумя способами в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Возник вопрос случайно ли число 1729 появилось в задаче о целочисленных циклических многоугольниках или же здесь существуют какие-то глубинные математические закономерности пока неизвестные нам? В данной работе мы попытаемся дать ответ на этот вопрос.

Число 1729 является сфеническим, так как разлагается в произведение трех различных простых множителей: $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$. И, как выяснилось в ходе нашего исследования, определяющим фактором для построения ломаных оказался тот факт, что это первое сфеническое число, все три простых делителя которого, имеют вид $3k + 1$.

То есть число 1729 оказалось лишь частным случаем более общей закономерности, для которой свойство "быть числом-такси" не является необходимым.

В работе, во втором разделе, мы обнаруживаем и исследуем новые свойства сфенических чисел-такси, на основе которых формулируем и используем новый алгоритм для их вычисления.

Начиная с третьего раздела, эмпирически и аналитически подтверждается связь между сфеническими числами с простыми делителями вида $3k + 1$ и натуральными радиусами окружностей, в половину которых можно вписывать целочисленные ломаные.

2. Сфенические числа и числа-такси

Сфенические числа - это числа вида $n = p \cdot q \cdot r$, $p < q < r$, где p, q, r - простые числа ([2]). Если же говорить о сфенических числах-такси, то первые известные такие числа приведены в следующей таблице ([3]):

Число такси (n)	Разложение ($p \cdot q \cdot r$)	Суммы кубов ($a^3 + b^3 = c^3 + d^3$)
1729	$7 \cdot 13 \cdot 19$	$1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$
20683	$13 \cdot 37 \cdot 43$	$10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3$
149389	$31 \cdot 61 \cdot 79$	$8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3$
195841	$37 \cdot 67 \cdot 79$	$9^3 + 58^3 = 22^3 + 57^3$
327763	$31 \cdot 97 \cdot 109$	$30^3 + 67^3 = 51^3 + 58^3$

Я заметил одну интересную и легко проверяемую для всех этих чисел закономерность: суммы оснований $a + b$ и $c + d$ равны второму (q) и третьему (r) простому числу в разложении числа n на простые множители. И это оказалось не случайно.

Теорема 1. Пусть $n = pqr$ ($p < q < r$), p, q, r - простые и

$$n = a^3 + b^3 = c^3 + d^3, \text{ где } a, b, c, d - \text{натуральные.}$$

Если, при этом, $a + b < c + d$, то $q = a + b$ и $r = c + d$.

Доказательство. Используем разложения для суммы кубов:

$$\begin{cases} (a + b)(a^2 - ab + b^2) = pqr \\ (c + d)(c^2 - cd + d^2) = pqr \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим, для краткости записи:

$$a + b = x, c + d = y, a^2 - ab + b^2 = A, c^2 - cd + d^2 = B.$$

Исходя из легко проверяемого неравенства $4 \cdot (a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)^2$ и аналогичного для c и d , находим соотношения между делителями x, A, y, B числа n :

$$\begin{cases} A = a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{x^2}{4} \\ B = c^2 - cd + d^2 \geq \frac{(c+d)^2}{4} = \frac{y^2}{4} \end{cases} \quad (2)$$

Кроме этого, $A = a^2 - ab + b^2 = ((a + b)^2 - 3ab) = x^2 - 3ab$ и, аналогично, $B = y^2 - 3ab$, поэтому,

$$\begin{cases} 3ab = x^2 - A \geq 3 \\ 3ab = y^2 - B \geq 3 \end{cases} \quad (3)$$

Используя (2) и (3), получаем общие ограничения на x и y ($x < y$):

$$\begin{cases} 3 + A \leq x^2 \leq 4A \\ 3 + B \leq y^2 \leq 4B \end{cases} \quad (4)$$

Число n имеет только 8 делителей: $1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr$.

Перебирая все эти варианты для делителей x и y , убеждаемся, что единственный непротиворечивый с условиями (4) вариант: $x = q, y = r$.

Рассмотрим возможные случаи для $x = a + b > 1$:

1. Пусть $x = p$, тогда $A = qr$ и, согласно (4), $3 + qr \leq p^2 \leq 4qr$. Из неравенства $p < q < r$ следует, что $qr > p^2$. Противоречие.

2. Пусть $x = q$, тогда $A = pr$ и из (4):

$$3 + pr \leq q^2 \leq 4pr. \quad (5)$$

Рассмотрим возможные варианты $y > q : r, pq, pr, qr$.

- Если $y = pq$, то $B = r$. Из (4): $3 + r \leq (pq)^2 \leq 4r$. Согласно (5): $(pq)^2 = p^2q^2 \geq p^2(3 + pr) = 3p^2 + p^3r > 4r$. Противоречие.
- Если $y = pr$, то $B = q$. Из (4): $3 + q \leq (pr)^2 \leq 4q$, что невозможно, поскольку $p \geq 2$, то есть $(pr)^2 \geq 4r^2 > 4q$.

- Если $y = qr$, то $B = p$. Из (4): $3 + p \leq (qr)^2 \leq 4p$, невозможно, поскольку $q > 2$.
- Если $y = r$, то $B = pq$. Из (4): $3 + pq \leq r^2 \leq 4pq$. Этот случай возможен.

3. Пусть $x = r$, тогда $A = pq$ и из (4):

$$3 + pq \leq r^2 \leq 4pq. \quad (6)$$

Так как теперь $y > r$, то для него возможные варианты: pq, pr, qr .

- Если $y = pq$, то $B = r$. Из (4): $3 + r \leq (pq)^2 \leq 4r$. Согласно (6): $16r^2 \leq 64pq$. С другой стороны, $16r^2 \geq (pq)^4$. Так как $pq \geq 6$, то $(pq)^4 > 64pq$. Противоречие.
- Если $y = pr$, то $B = q$. Из (4): $3 + q \leq (pr)^2 \leq 4q$. Сразу противоречие, ибо $p \geq 2$, следовательно $(pr)^2 \geq 4r > 4q$.
- Если $y = qr$, то $B = p$. Из (4): $3 + p \leq (qr)^2 \leq 4p$, невозможно, поскольку $q > 2$.

4. Пусть $x = pq$, тогда $A = r$ и из (4): $3 + r \leq (pq)^2 \leq 4r$. Учитывая, что $y > x = pq$, получаем для y только два варианта: pr или qr .

Для $y = pr$, $B = q$, имеем: $3 + q \leq (pr)^2 \leq 4q$. Это неравенство невозможно, оно уже рассматривалось ранее. И то же самое для $y = qr$.

5. Пусть $x = pr$, тогда $A = q$, $y = qr, B = p$. Невозможно.

Итак, единственный возможный случай это $x = a + b = q$ и $y = c + d = r$. Что и требовалось доказать.

Теорема 1 дает возможность получить новый эффективный алгоритм, для получения сфенических чисел-такси:

1. Рассматриваем все комбинации из 3 простых чисел (p, q, r) до некоторого натурального числа.
2. Для каждой комбинации вычисляем пару $(\frac{q^2 - pr}{3}, \frac{r^2 - pq}{3})$, при этом выбираем только случаи, когда $q^2 - pr$ и $r^2 - pq$ делятся на 3 нацело.

3. Теперь, поскольку $a + b = q$ и $ab = \frac{q^2 - pr}{3} = m_1$, то натуральные числа a и b являются корнями квадратного уравнения: $x^2 - qx + m_1 = 0$. Решаем его в натуральных числах. Проверяем, что $D = q^2 - 4m_1$ является точным квадратом и так далее.

4. Аналогично, для чисел c и d решаем квадратное уравнение $x^2 - rx + m_2 = 0$, $m_2 = \frac{r^2 - pq}{3}$ в натуральных числах.

Приведу программную реализацию этого алгоритма на языке Julia.

```
using Primes, Combinatorics
function find(max_p)
    res = Vector{Vector{Int64}}{ }
    for c in combinations(primes(max_p), 3)
        (p, q, r) = c
        # Проверка на делимость на 3
        if (q^2 - p*r) % 3 != 0 || (r^2 - p*q) % 3 != 0
            continue
        end
        m1 = div(q^2 - p*r, 3); m2 = div(r^2 - p*q, 3)
        # Проверка положительности
        if m1 <= 0 || m2 <= 0 continue end
        # Проверка дискриминантов
        d1 = q^2 - 4*m1; d2 = r^2 - 4*m2
        if d1 < 0 || d2 < 0 continue end
        sd1 = isqrt(d1); sd2 = isqrt(d2)
        if sd1^2 != d1 || sd2^2 != d2 continue end
        if (q+sd1)%2 > 0 || q-sd1 <= 0 || (q-sd1)%2 > 0
            continue
        end
        if (r+sd2)%2 > 0 || r-sd2 <= 0 || (r-sd2)%2 > 0
            continue
        end
        # Решение уравнений
        a = div(q-sd1,2); b = div(q+sd1,2)
        c = div(r-sd2,2); d = div(r+sd2,2)
        # Проверка равенства сумм кубов
        n = p * q * r
        ab = a^3 + b^3; cd = c^3 + d^3
```

```

    if ab == cd && ab == n
        push!(res, [n, p, q, r, a, b, c, d])
    end
end
end
sort!(res)
end

```

Результаты работы программы для простых до 10000.

Сфенические числа-такси. Найдено 98 для $p < q < r < 10000$

```

-----
[ n   p   q   r   a   b   c   d ]
-----
[1729, 7, 13, 19, 1, 12, 9, 10]
[20683, 13, 37, 43, 10, 27, 19, 24]
[149389, 31, 61, 79, 8, 53, 29, 50]
[195841, 37, 67, 79, 9, 58, 22, 57]
[327763, 31, 97, 109, 30, 67, 51, 58]
[2418271, 73, 157, 211, 23, 134, 95, 116]
[6058747, 79, 271, 283, 99, 172, 120, 163]
[7620661, 103, 241, 307, 45, 196, 133, 174]
[9443761, 103, 277, 331, 68, 209, 146, 185]
[10765603, 109, 283, 349, 64, 219, 163, 186]
[13623913, 103, 349, 379, 121, 228, 186, 193]
[18406603, 193, 283, 337, 19, 264, 75, 262]
[32114143, 139, 463, 499, 159, 304, 223, 276]
[68007673, 181, 607, 619, 222, 385, 241, 378]
[105997327, 211, 691, 727, 239, 452, 296, 431]
[106243219, 193, 733, 751, 307, 426, 363, 388]
[166560193, 331, 607, 829, 57, 550, 316, 513]
[216226981, 373, 661, 877, 61, 600, 304, 573]
[446686147, 349, 1093, 1171, 355, 738, 472, 699]
[584504191, 421, 1051, 1321, 220, 831, 615, 706]
[813357253, 541, 1039, 1447, 106, 933, 610, 837]
[959281759, 421, 1471, 1549, 543, 928, 694, 855]
[1098597061, 439, 1567, 1597, 613, 954, 669, 928]
[1736913439, 601, 1543, 1873, 351, 1192, 807, 1066]
[2072769211, 883, 1321, 1777, 46, 1275, 534, 1243]

```

[2460483307, 613, 1873, 2143, 555, 1318, 1068, 1075]
 [2534342347, 673, 1867, 2017, 531, 1336, 726, 1291]
 [2696122459, 769, 1609, 2179, 219, 1390, 960, 1219]
 [2992523203, 883, 1627, 2083, 187, 1440, 699, 1384]
 [3438513979, 631, 2281, 2389, 878, 1403, 1130, 1259]
 [3738730483, 1153, 1627, 1993, 75, 1552, 454, 1539]
 [5080981393, 787, 2467, 2617, 810, 1657, 1032, 1585]
 [5570040313, 739, 2689, 2803, 1048, 1641, 1314, 1489]
 [5795759899, 733, 2791, 2833, 1188, 1603, 1302, 1531]
 [7170123151, 1063, 2221, 3037, 295, 1926, 1383, 1654]
 [7546425517, 1033, 2557, 2857, 616, 1941, 981, 1876]
 [7821346633, 1291, 1987, 3049, 2, 1985, 1241, 1808]
 [8602562953, 1279, 2083, 3229, 34, 2049, 1476, 1753]
 [9242888779, 853, 3253, 3331, 1371, 1882, 1648, 1683]
 [10843895539, 1009, 3061, 3511, 898, 2163, 1708, 1803]
 [11280947113, 1801, 2467, 2539, 225, 2242, 298, 2241]
 [11932918849, 1231, 2683, 3613, 402, 2281, 1692, 1921]
 [12747309181, 1951, 2341, 2791, 5, 2336, 461, 2330]
 [13501730311, 1153, 3307, 3541, 983, 2324, 1295, 2246]
 [14537287459, 1531, 2659, 3571, 219, 2440, 1243, 2328]
 [14753560033, 1453, 2677, 3793, 225, 2452, 1584, 2209]
 [15054607279, 997, 3853, 3919, 1671, 2182, 1935, 1984]
 [18216779887, 1693, 2797, 3847, 166, 2631, 1336, 2511]
 [18816356071, 1429, 3121, 4219, 466, 2655, 2052, 2167]
 [23215399633, 1693, 3499, 3919, 658, 2841, 1126, 2793]
 [24518353609, 1747, 3049, 4603, 144, 2905, 2202, 2401]
 [29255160331, 1597, 4027, 4549, 979, 3048, 1627, 2922]
 [31113708481, 1873, 3331, 4987, 186, 3145, 2409, 2578]
 [33197363533, 1567, 4243, 4993, 1069, 3174, 2124, 2869]
 [37841443813, 1999, 4003, 4729, 654, 3349, 1468, 3261]
 [39100327831, 1399, 5227, 5347, 2148, 3079, 2439, 2908]
 [41225807107, 1669, 4831, 5113, 1467, 3364, 1843, 3270]
 [43777429999, 1933, 4591, 4933, 1103, 3488, 1502, 3431]
 [44883220087, 1531, 5197, 5641, 1806, 3391, 2799, 2842]
 [44974423969, 1627, 4969, 5563, 1505, 3464, 2441, 3122]
 [47736505249, 1777, 4903, 5479, 1337, 3566, 2105, 3374]
 [48238207597, 2203, 3853, 5683, 213, 3640, 2470, 3213]
 [54359792299, 2557, 4153, 5119, 366, 3787, 1395, 3724]

[58682954269, 1993, 4801, 6133, 933, 3868, 2832, 3301]
 [69409329697, 2311, 4831, 6217, 729, 4102, 2401, 3816]
 [78313460419, 2851, 4783, 5743, 507, 4276, 1531, 4212]
 [80839650457, 2383, 5323, 6373, 1018, 4305, 2268, 4105]
 [84729678973, 2311, 5869, 6247, 1541, 4328, 1997, 4250]
 [92652490621, 3049, 4591, 6619, 66, 4525, 2302, 4317]
 [97621905673, 1861, 7177, 7309, 3097, 4080, 3636, 3673]
 [100359155269, 2137, 6373, 7369, 1821, 4552, 3564, 3805]
 [101814591187, 2053, 6763, 7333, 2283, 4480, 3283, 4050]
 [102994980667, 2017, 6907, 7393, 2456, 4451, 3398, 3995]
 [109176102793, 2731, 5689, 7027, 921, 4768, 2482, 4545]
 [115787824783, 3109, 4993, 7459, 119, 4874, 2996, 4463]
 [117761282263, 2083, 7489, 7549, 2991, 4498, 3103, 4446]
 [127669335499, 2341, 6823, 7993, 1876, 4947, 3982, 4011]
 [151122317677, 2713, 7027, 7927, 1766, 5261, 2906, 5021]
 [165812161303, 3001, 6337, 8719, 850, 5487, 4296, 4423]
 [178660856467, 2917, 6991, 8761, 1387, 5604, 3747, 5014]
 [201170668987, 3697, 6211, 8761, 352, 5859, 3259, 5502]
 [203514378013, 3037, 7177, 9337, 1317, 5860, 4645, 4692]
 [215793111907, 2797, 8263, 9337, 2395, 5868, 4006, 5331]
 [225744618097, 4297, 6553, 8017, 465, 6088, 2001, 6016]
 [230114585647, 3079, 7933, 9421, 1863, 6070, 3847, 5574]
 [237020058973, 3391, 7177, 9739, 997, 6180, 4413, 5326]
 [238913829163, 3793, 6703, 9397, 499, 6204, 3642, 5755]
 [251715291319, 2791, 9109, 9901, 3039, 6070, 4398, 5503]
 [266992291729, 3547, 8269, 9103, 1884, 6385, 2857, 6246]
 [275331927043, 3697, 8263, 9013, 1804, 6459, 2659, 6354]
 [278450575201, 3613, 8737, 8821, 2304, 6433, 2401, 6420]
 [281101735297, 3373, 8863, 9403, 2425, 6438, 3090, 6313]
 [287541374077, 3967, 7621, 9511, 1029, 6592, 3162, 6349]
 [328658155009, 3457, 9643, 9859, 2921, 6722, 3194, 6665]
 [342769769533, 4153, 9043, 9127, 2109, 6934, 2202, 6925]
 [347519256481, 4357, 8017, 9949, 993, 7024, 3132, 6817]
 [355826435077, 4519, 8191, 9613, 1114, 7077, 2653, 6960]
 [571167992761, 6991, 8389, 9739, 92, 8297, 1457, 8282]

Мы видим здесь, что простые числа p, q, r довольно близки друг к другу. Таким образом, если добавить в программу ограничения, которые

следуют из доказательства теоремы 1:

$$\sqrt{pr} < q < 2\sqrt{pr}, \quad \sqrt{pq} < r < 2\sqrt{pq},$$

то программа будет еще более эффективной.

Более того, можно доказать, что простые множители p, q, r сфенического числа-такси обязаны иметь вид $3k + 1$, и этот факт еще вдвое уменьшает их перебор.

Теорема 2. Все простые множители p, q, r сфенического числа-такси $n = pqr$ имеют вид $3k + 1$.

Доказательство. Из теоремы 1 мы знаем, что $a + b = q$, $c + d = r$. Кроме того, из разложения суммы кубов:

$$a^2 - ab + b^2 = pr, \quad c^2 - cd + d^2 = pq.$$

Рассмотрим простое число p . Так как $p \mid n$, то $p \mid a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Но $p \neq q = a + b$ (так как $p < q$), значит $p \nmid a + b$. Следовательно, $p \mid a^2 - ab + b^2$.

Отсюда получаем: $a^2 \equiv ab - b^2 \pmod{p}$. Если $b \equiv 0 \pmod{p}$, то $a \equiv 0 \pmod{p}$, и тогда $p \mid a + b$, что невозможно. Значит, $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, и можно разделить на b^2 :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Обозначим $t \equiv a \cdot b^{-1} \pmod{p}$. Тогда $t^2 - t + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Умножив на $t + 1$, получаем $t^3 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то есть $t^3 \equiv -1 \pmod{p}$. Отсюда $t^6 \equiv 1 \pmod{p}$, но $t^3 \not\equiv 1 \pmod{p}$. Значит, порядок элемента t в мультипликативной группе $\mathbb{F}_p^\times$ равен ровно 6.

По теореме Лагранжа, порядок элемента делит порядок группы $p - 1$. Следовательно, $6 \mid (p - 1)$, то есть $p \equiv 1 \pmod{6}$. Так как p — простое, то p имеет вид $6m + 1$, а значит и $3k + 1$, где $k = 2m$.

Для чисел q и r доказательство аналогично: $q = a + b$, значит $q \mid a^3 + b^3$ и $q \nmid a + b$, следовательно $q \mid a^2 - ab + b^2$, откуда по той же схеме получаем $q \equiv 1 \pmod{6}$. Аналогично для $r = c + d$.

Замечание. Теорема 2 показывает, что все простые множители сфенических чисел-такси имеют вид $3k + 1$. Как будет показано в разделе 4, это условие является достаточным для существования ломаных и не требует, чтобы сфеническое число было числом-такси.

3. Ломанные вписанные в полуокружность

В работе [1] (формула (3)) для получения циклических целочисленных многоугольников мы рассматривали комплексные числа на единичной окружности (лучевые проекции на нее вершин реального многоугольника или ломаной):

$$z(x) = \frac{\sqrt{4n^2 - x^2}}{2n} + \frac{x}{2n}i, \quad 0 < x < 2r,$$

предполагая, что, если корень в действительной части не извлекается, то для всех вершин он один и тот же. Если, при этом, произведение комплексных чисел

$$\prod_{k=1}^m z(x_k) (m - \text{число сторон или звеньев})$$

сворачивалось к -1 для вписанных многоугольников или к i для ломанных вписанных в половину окружности, то мы обнаруживали новое решение задачи.

Если $4r^2 - x^2$ не является полным квадратом, то:

$$4r^2 - x^2 = d \cdot y^2,$$

где d — бесквадратное число. Тогда:

$$z(x) = \frac{y\sqrt{d}}{2r} + i\frac{x}{2r}.$$

3.1. Лемма о единственности бесквадратной части

Лемма 1. Пусть n нечётно, и для каждого $k = 1, \dots, n$ выполняется равенство:

$$4r^2 - x_k^2 = d_k y_k^2,$$

где d_k — бесквадратные числа. Если:

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{\sqrt{d_k} y_k}{2r} + i\frac{x_k}{2r} \right) = i,$$

то все d_k равны.

Доказательство. Предположим, что все d_k различны. Умножим обе части равенства на $(2r)^n$:

$$\prod_{k=1}^n (y_k \sqrt{d_k} + ix_k) = i(2r)^n. \quad (7)$$

Раскроем произведение в левой части (7). Вещественная часть его равна нулю и содержит линейную комбинацию (с целыми коэффициентами) чисел вида:

$$\sqrt{d_{i_1} d_{i_2} \cdots d_{i_m}}.$$

Рассмотрим член, который под корнем содержит все d_k :

$$\left(\prod_{k=1}^n y_k \right) \sqrt{d_1 d_2 \cdots d_n}.$$

Он единственный, остальные слагаемые содержат под корнем не все d_k .

По теореме Безиковича квадратные корни из различных бесквадратных чисел линейно независимы над полем рациональных чисел [5].

Радикал $\sqrt{d_1 d_2 \cdots d_n}$ не равен никакому другому, то есть линейно независим от всех остальных радикалов суммы.

Следовательно, для того чтобы чтобы вещественная часть равнялась нулю, необходимо, чтобы коэффициент при нём был равен нулю:

$$\prod_{k=1}^n y_k = 0,$$

что невозможно, так как все $y_k > 0$. Противоречие. Значит, все d_k равны.

3.2. Основная теорема

Теорема 3. Пусть n нечётно. Ломаная из n целочисленных звеньев с длинами $x_1, \dots, x_n$ может быть вписана в полуокружность радиуса r тогда и только тогда, когда существует бесквадратное d и целые $y_k > 0$ такие, что:

$$x_k^2 + d y_k^2 = 4r^2, \quad k = 1, \dots, n, \quad (8)$$

и выполняется равенство:

$$\boxed{\prod_{k=1}^n (y_k \sqrt{d} + ix_k) = i(2r)^n.} \quad (9)$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1 и определения $z(x)$. Достаточность: если (2) и (3) выполнены, то:

$$\prod_{k=1}^n \frac{y_k \sqrt{d} + i x_k}{2r} = i.$$

Каждое число в левой части имеет модуль 1 (в силу (8)), значит, оно равно $e^{i\alpha_k/2}$, где α_k — центральный угол, соответствующий звену x_k . Тогда:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = \pi,$$

что и означает вписанность в полуокружность.

3.3. Следствия для небольших n

Следствие 1 ($n = 1$). Для одного звена длины x формула (9) даёт:

$$y\sqrt{d} + ix = i(2r)^1 = i2r.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части:

$$\begin{cases} y\sqrt{d} = 0, \\ x = 2r. \end{cases}$$

Так как $\sqrt{d} \neq 0$, получаем $y = 0, x = 2r$.

Это вырожденный случай: ломаная из одного звена, вписанная в полуокружность, является диаметром.

Следствие 2 ($n = 3$). Для трёх звеньев формула (9) эквивалентна формуле (5) из работы [1]:

$$r(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1 x_2 x_3 = 4r^3. \quad (10)$$

Доказательство. По формуле (9):

$$(\sqrt{d} y_1 + i x_1)(\sqrt{d} y_2 + i x_2)(\sqrt{d} y_3 + i x_3) = i(2r)^3.$$

Раскроем произведение. Обозначим $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $P = x_1 x_2 x_3$.

Вещественная часть:

$$\sqrt{d}(d y_1 y_2 y_3 - x_1 x_2 y_3 - x_1 y_2 x_3 - y_1 x_2 x_3) = 0.$$

Так как $\sqrt{d} \neq 0$, получаем:

$$d y_1 y_2 y_3 = x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3. \quad (11)$$

Мнимая часть:

$$x_1 x_2 x_3 - d(y_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 y_3) = 8r^3. \quad (12)$$

Теперь используем условие $x_k^2 + d y_k^2 = 4r^2$. Нам нужно исключить y_k и получить формулу (10). Для этого умножим (11) на $\sqrt{d}$ и воспользуемся тождеством:

$$(x_1^2 + d y_1^2)(x_2^2 + d y_2^2)(x_3^2 + d y_3^2) = (4r^2)^3 = 64r^6.$$

После раскрытия и приведения с использованием (11) и (12) получается:

$$4r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 8r x_1 x_2 x_3 = 16r^4.$$

Поделив на $4r$ (при $r > 0$):

$$r(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1 x_2 x_3 = 4r^3.$$

Это в точности формула (5) из моей работы [1].

Следствие 3 ($n = 5$). Для пяти звеньев формула (9) принимает вид:

$$\prod_{k=1}^5 (y_k \sqrt{d} + i x_k) = i(2r)^5, \quad (13)$$

где d — бесквадратное число, единое для всех звеньев (по лемме 1).

В отличие от предыдущего случая, здесь не удастся прийти к компактной полиномиальной формуле, аналогичной (10).

Однако формула (13) сама по себе является полным и точным критерием для нечетных n и проверку можно осуществить в натуральных числах, не прибегая к приближенным вычислениям. Это точно также справедливо и для общего случая формулы (9).

С точки зрения программирования, можно использовать следующую идею умножения без вычисления иррациональности любого нечетного количества комплексных чисел вида $A\sqrt{d} + Bi$.

При умножении двух таких чисел $\sqrt{d}$ перемещается во мнимую часть, а при умножении произведения двух на третье $\sqrt{d}$ вновь возвращается в вещественную часть, а мнимая становится целой. Поэтому функцией

```
function mult3(d,z1,z2,z3)
  A = real(z1); B = imag(z1)
  C = real(z2); D = imag(z2)
  E = real(z3); F = imag(z3)
  G = d*A*C-B*D; H = C*B+A*D
  G*E - H*F + im*(G*F+d*H*E)
end
```

можно вычислять произведение любого нечетного количества комплексных чисел вида $A\sqrt{d} + Bi$, применяя ее последовательно столько раз сколько нужно.

Замечание. Лемма 1, теорема 3 и её следствия не накладывают никаких ограничений на r . Они справедливы для любого натурального r , для которого существуют целые x_k, y_k , удовлетворяющие уравнению $x_k^2 + dy_k^2 = 4r^2$.

Далее мы применим эту общую теорию к частному случаю, когда r - сфеническое число, все простые делители которого имеют вид $3k + 1$. Именно этот случай имеет ряд интересных закономерностей, которые проявились в первом таком числе $r = 1729$ и привлекли наше внимание.

3.4. Количество звеньев для ломаной при $d = 3$

На практике выяснилось, что неизвлекаемая часть $d = 3$ играет особую роль в количестве вписанных в половину окружности ломаных. Именно при $d = 3$ для окружности с радиусом равным сфеническому числу n с простыми делителями $3k + 1$ наблюдается больше всего таких ломаных.

Если $\sqrt{4n^2 - x^2} = y\sqrt{3}$, то комплексные числа принимают вид:

$$z(x) = \frac{y\sqrt{3}}{2n} + \frac{x}{2n}i$$

и мы получаем основное уравнение (8) в этом случае:

$$x^2 + 3y^2 = 4n^2, \quad 0 < x < 2n, \quad y > 0 \quad (14)$$

Оказалось, что причина популярности $d = 3$ в том, что для сфенических чисел с простыми делителями $3k + 1$ уравнение (14) всегда имеет ровно 40 решений. Это больше, чем число решений уравнения (8) для любого $d \neq 3$.

То есть, для любого сфенического числа n с простыми делителями $3k + 1$ уравнение (14) всегда гарантирует 40 целочисленных звеньев для построения ломаной.

Теорема 4. Для $n = p_1 p_2 \dots p_m$, где все $p_i \equiv 1 \pmod{3}$, уравнение (14) имеет ровно

$$R(n) = \frac{6 \cdot 3^m - 2}{4} \quad (15)$$

решений. В частности, для $m = 3$ (сфенические числа) $R(n) = 40$.

Доказательство. Согласно классической теории квадратичных форм (Сох [4], Theorem 2.2), число представлений $r_3(N)$ числа N формой $x^2 + 3y^2$ (с учётом знаков и порядка) задаётся формулой:

$$r_3(N) = 6 \sum_{d|N, 3 \nmid d} \left(\frac{-3}{d} \right), \quad (16)$$

где $\left(\frac{-3}{d} \right)$ — символ Кронекера. Применим эту формулу к $N = 4n^2$, где $n = p_1 p_2 \dots p_m$ и все $p_i \equiv 1 \pmod{3}$. Делители числа $4n^2$ имеют вид

$$d = 2^\alpha \cdot p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m}, \quad \alpha \in \{0, 1, 2\}, \quad 0 \leq \beta_i \leq 2.$$

Для $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ символ Кронекера равен

$$\left(\frac{-3}{p_i} \right) = 1,$$

и для степеней p_i^β :

$$\left(\frac{-3}{p_i^\beta} \right) = \left(\frac{-3}{p_i} \right)^\beta = 1.$$

Для делителей вида 2^α :

$$\left(\frac{-3}{2^0}\right) = 1, \quad \left(\frac{-3}{2^1}\right) = -1, \quad \left(\frac{-3}{2^2}\right) = 1.$$

Сумма по α : $1 + (-1) + 1 = 1$.

Сумма по β_i для каждого p_i :

$$\sum_{\beta=0}^2 \left(\frac{-3}{p_i^\beta}\right) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Таким образом,

$$\sum_{d|4n^2, 3 \nmid d} \left(\frac{-3}{d}\right) = \underbrace{\sum_{\alpha=0}^2 \left(\frac{-3}{2^\alpha}\right)}_{=1} \cdot \prod_{i=1}^m \underbrace{\sum_{\beta_i=0}^2 \left(\frac{-3}{p_i^{\beta_i}}\right)}_{=3} = 3^m.$$

Подставляя в (16), получаем:

$$r_3(4n^2) = 6 \cdot 3^m.$$

Это число всех представлений с учётом знаков $(\pm x, \pm y)$ и порядка. Чтобы получить решения с $0 < x < 2n$ и $y > 0$, нужно:

1. Исключить два тривиальных решения $x = \pm 2n, y = 0$.
2. Поделить на 4 (учёт четырёх комбинаций знаков $(\pm x, \pm y)$).

Получаем:

$$R(n) = \frac{r_3(4n^2) - 2}{4} = \frac{6 \cdot 3^m - 2}{4}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4 (о числе решений для $d = 3$). Для любого сфенического числа $n = pqr$, где $p, q, r \equiv 1 \pmod{3}$, уравнение (14) имеет ровно 40 решений. Это обеспечивает достаточное количество хорд для построения ломаных из 3, 5 и 7 звеньев.

3.5 Алгоритм и программа для вычисления ломаных

Поиск k -звенных ломаных для сфенических чисел n может быть организован при помощи следующего алгоритма.

1. Ищем все возможные d для данного n . Для упрощения вычислений используем следующие соображения: $y^2d = 4n^2 - x^2 = (2n - x)(2n + x) = uv < 4n^2$, где $u = 2n - x$ ($u < 2n$), $v = 2n + x \Rightarrow u + v = 4n, uv = y^2d$.

Перебираем u от 1 до $2n - 1$, вычисляем $y^2d = u(4n - u)$ для каждого u , откуда находим d .

2. Для каждого найденного d , решаем уравнение $x^2 + dy^2 = 4n^2$, получая все возможные длины звеньев для ломаных. Для $d = 3$ всегда получаем 40 решений, для других d меньше.

3. Для каждого списка ломаных, полученных на предыдущем шаге, перебираем все их сочетания по k штук.

4. Для каждого сочетания (это возможная ломаная) осуществляем проверку при помощи равенства (9), выполняя только точные целочисленные вычисления, без извлечения корней и других приближенных вычислений.

Приведем программу на языке Julia, реализующая этот алгоритм:

```
function mult(d, a)
    n = length(a)
    n % 2 == 1 || error("Число элементов должно быть нечётным")
    b = copy(a)
    while length(b) > 1
        z1, z2, z3 = b[1], b[2], b[3]
        A, B = real(z1), imag(z1)
        C, D = real(z2), imag(z2)
        E, F = real(z3), imag(z3)
        G = d*A*C - B*D
        H = C*B + A*D
        real_part = G*E - H*F
        imag_part = G*F + d*H*E
        z123 = real_part + im*imag_part
        b = [z123; b[4:end]]
    end
    return b[1]
end
```

```

function rem(n)
    # n = 4r^2 - x^2
    d = n
    while d % 4 == 0    d ÷= 4    end
    p = 3
    while p * p <= d
        if d % (p * p) == 0
            while d % (p * p) == 0
                d ÷= (p * p)
            end
            end
            p += 2
        end
    return (d, isqrt(div(n,d)))
end

function chords(n,d)
    m = div(2*n, isqrt(d))
    res = Int64[]
    for y in 1:m
        rem2 = 4*Int128(n)^2 - d*y^2
        if rem2 > 0
            x = isqrt(rem2)
            if x^2 == rem2 push!(res, x) end
        end
    end
    sort!(res)
end

function isline_odd(r,l)
    m = length(l)
    m%2==1 || return false
    sum(l) < pi*r || return false
    (d, y) = rem(4*r^2-l[1]^2)
    ly = [y]
    for x in l[2:end]
        (dx, y) = rem(4*r^2-x^2)
        if dx!=d return false end
    end
end

```

```

        push!(ly,y)
    end
    lz = Vector{Complex{Int64}}{0}
    for k in 1:m
        push!(lz, ly[k]+im*1[k])
    end
    prod_left = mult(d,lz)
    prod_right = im*(2*r)^m
    prod_left == prod_right
end

function has_enough_solutions(n,d,k)
    count = 0
    max_y = div(2n, isqrt(d))
    for y in 1:max_y
        rem2 = 4n^2 - d*y^2
        if rem2 > 0
            x = isqrt(rem2)
            if x^2 == rem2
                count += 1
                if count >= k
                    return true
                end
            end
        end
    end
    return false
end

function find_all_lines(n,k)
    res = Vector{Vector{Int64}}{0}
    dd = Vector{Int64}{0}
    count = 0
    for u in Int128(1):2*n-1
        dy = u*(4*n - u)
        if dy >= 4*n^2 continue end
        d = rem(dy)[1]

```

```

if d > 1 && !(d in dd)
    push!(dd,d)
    if !has_enough_solutions(n,d,k) continue end
    pool = chords(n,d)
    sol = [
        comb for comb in combinations(pool, k)
        if isline_odd(n,comb)
    ]
    if length(sol) > 0
        count+=length(sol)
        println("-"^50)
        println(count,". Просмотрено разных d: ",string(length(dd),"
            Для d = ",d," , ломаных найдено: ", length(sol)))
        for x in sort!(sol)
            push!(res,x)
            println(x)
        end
    end
end
end
println(string("Всего: ",count))
sort!(res)
end

```

4. Результаты численных экспериментов и классификация

Вычислим начальную последовательность сфенических чисел $n = pqr$, $p < q < r$, все простые числа которых имеют вид $3k + 1$.

```

julia> l = sort!(filter(x -> x[1]<7*13*5000,
    map(x -> (prod(x),x),
        collect(combinations(
            filter(x -> x%3==1, primes(5000)),
            3
        ))
    ))

```

```

    ))
2632-element Vector{Tuple{Int64, Vector{Int64}}}:
 (1729, [7, 13, 19])
 (2821, [7, 13, 31])
 (3367, [7, 13, 37])
 (3913, [7, 13, 43])
 (4123, [7, 19, 31])
 (4921, [7, 19, 37])
 (5551, [7, 13, 61])
 (5719, [7, 19, 43])
 (6097, [7, 13, 67])
 (6643, [7, 13, 73])
 ...
 (453901, [7, 61, 1063])
 (454027, [7, 37, 1753])
 (454057, [31, 97, 151])
 (454129, [13, 181, 193])
 (454363, [7, 13, 4993])
 (454639, [43, 97, 109])
 (454909, [7, 13, 4999])
 (454951, [7, 103, 631])
 (454987, [13, 31, 1129])

```

Как видим, 1729 - первое из них. Прдемонстрируем работу программы на примере $n = 1729$.

```
julia> find_all_lines(1729,3)
```

```

-----
64. Просмотрено разных d: 4. Для d = 3, ломаных найдено: 64
 [133, 299, 3431]
 [133, 386, 3419]
 [133, 494, 3401]
 [133, 658, 3367]
 [133, 1001, 3269]
 [133, 1159, 3211]
 [133, 1261, 3169]
 [133, 1342, 3133]
 [133, 1729, 2926]

```

[133, 1871, 2834]
[133, 2033, 2717]
[133, 2158, 2617]
[133, 2366, 2429]
[299, 494, 3367]
[299, 1001, 3211]
[299, 1342, 3059]
[299, 1583, 2926]
[299, 1729, 2834]
[299, 2033, 2611]
[299, 2242, 2429]
[386, 494, 3346]
[386, 917, 3211]
[386, 1261, 3059]
[386, 1729, 2783]
[386, 2242, 2366]
[494, 649, 3269]
[494, 658, 3266]
[494, 917, 3169]
[494, 1001, 3133]
[494, 1159, 3059]
[494, 1406, 2926]
[494, 1729, 2717]
[494, 1871, 2611]
[494, 2089, 2429]
[494, 2158, 2366]
[649, 658, 3211]
[649, 1261, 2926]
[649, 1729, 2617]
[649, 2033, 2366]
[658, 1001, 3059]
[658, 1406, 2834]
[658, 1583, 2717]
[658, 1729, 2611]
[658, 2158, 2242]
[917, 1001, 2926]
[917, 1159, 2834]
[917, 1342, 2717]

[917, 1729, 2429]
[917, 2033, 2158]
[1001, 1159, 2783]
[1001, 1261, 2717]
[1001, 1406, 2617]
[1001, 1729, 2366]
[1001, 1871, 2242]
[1001, 2033, 2089]
[1159, 1261, 2611]
[1159, 1583, 2366]
[1159, 1729, 2242]
[1261, 1406, 2429]
[1261, 1729, 2158]
[1342, 1406, 2366]
[1342, 1729, 2089]
[1406, 1729, 2033]
[1583, 1729, 1871]

65. Просмотрено разных d : 16. Для $d = 69$, ломаных найдено: 1
[130, 2108, 2660]

66. Просмотрено разных d : 38. Для $d = 451$, ломаных найдено: 1
[642, 1995, 2405]

67. Просмотрено разных d : 49. Для $d = 33$, ломаных найдено: 1
[1456, 1742, 1976]

74. Просмотрено разных d : 53. Для $d = 10$, ломаных найдено: 7
[182, 542, 3382]
[182, 798, 3318]
[182, 1482, 3042]
[182, 2018, 2698]
[542, 798, 3198]
[798, 898, 3042]
[798, 1482, 2698]

75. Просмотрено разных d : 412. Для $d = 7843$, ломаных найдено: 1
[169, 1533, 3021]

```

-----
76. Просмотрено разных d: 467. Для d = 13, ломаных найдено: 1
[754, 1092, 2964]
-----
77. Просмотрено разных d: 574. Для d = 166, ломаных найдено: 1
[858, 1190, 2850]
-----
78. Просмотрено разных d: 582. Для d = 22, ломаных найдено: 1
[546, 2086, 2394]
-----
79. Просмотрено разных d: 660. Для d = 222, ломаных найдено: 1
[646, 1534, 2758]
-----
80. Просмотрено разных d: 675. Для d = 2915, ломаных найдено: 1
[623, 1577, 2743]
-----
81. Просмотрено разных d: 714. Для d = 165, ломаных найдено: 1
[532, 1918, 2548]
-----
82. Просмотрено разных d: 884. Для d = 230, ломаных найдено: 1
[38, 2338, 2522]
Всего: 82

```

```
julia> find_all_lines(1729,5)
```

```

-----
165. Просмотрено разных d: 4. Для d = 3, ломаных найдено: 165
[133, 299, 386, 494, 3211]
[133, 299, 386, 1261, 2834]
[133, 299, 386, 1342, 2783]
[133, 299, 386, 1583, 2617]
[133, 299, 386, 2033, 2242]
[133, 299, 494, 1001, 2926]
[133, 299, 494, 1159, 2834]
[133, 299, 494, 1342, 2717]
[133, 299, 494, 1729, 2429]
[133, 299, 494, 2033, 2158]
[133, 299, 649, 1342, 2617]
[133, 299, 658, 1001, 2834]

```

[133, 299, 658, 1342, 2611]
[133, 299, 658, 1583, 2429]
[133, 299, 917, 1342, 2429]
[133, 299, 1001, 1261, 2429]
[133, 299, 1001, 1342, 2366]
[133, 299, 1001, 1729, 2033]
[133, 299, 1159, 1342, 2242]
[133, 299, 1159, 1583, 2033]
[133, 299, 1261, 1342, 2158]
[133, 299, 1342, 1406, 2033]
[133, 299, 1342, 1583, 1871]
[133, 386, 494, 658, 3059]
[133, 386, 494, 917, 2926]
[133, 386, 494, 1159, 2783]
[133, 386, 494, 1261, 2717]
[133, 386, 494, 1406, 2617]
[133, 386, 494, 1729, 2366]
[133, 386, 494, 1871, 2242]
[133, 386, 494, 2033, 2089]
[133, 386, 649, 1261, 2617]
[133, 386, 658, 917, 2834]
[133, 386, 658, 1001, 2783]
[133, 386, 658, 1261, 2611]
[133, 386, 658, 1583, 2366]
[133, 386, 658, 1729, 2242]
[133, 386, 917, 1001, 2617]
[133, 386, 917, 1261, 2429]
[133, 386, 917, 1342, 2366]
[133, 386, 917, 1729, 2033]
[133, 386, 1001, 1261, 2366]
[133, 386, 1159, 1261, 2242]
[133, 386, 1261, 1342, 2089]
[133, 386, 1261, 1406, 2033]
[133, 386, 1261, 1583, 1871]
[133, 494, 649, 658, 2926]
[133, 494, 649, 1159, 2617]
[133, 494, 649, 1871, 2033]
[133, 494, 658, 1001, 2717]

[133, 494, 658, 1159, 2611]
 [133, 494, 658, 1406, 2429]
 [133, 494, 658, 1729, 2158]
 [133, 494, 917, 1159, 2429]
 [133, 494, 1001, 1159, 2366]
 [133, 494, 1001, 1729, 1871]
 [133, 494, 1159, 1261, 2158]
 [133, 494, 1159, 1342, 2089]
 [133, 494, 1159, 1406, 2033]
 [133, 494, 1159, 1583, 1871]
 [133, 494, 1342, 1406, 1871]
 [133, 649, 658, 1001, 2617]
 [133, 649, 658, 1261, 2429]
 [133, 649, 658, 1342, 2366]
 [133, 649, 658, 1729, 2033]
 [133, 649, 1159, 1261, 2033]
 [133, 649, 1261, 1342, 1871]
 [133, 658, 917, 1001, 2429]
 [133, 658, 917, 1342, 2158]
 [133, 658, 1001, 1159, 2242]
 [133, 658, 1001, 1261, 2158]
 [133, 658, 1001, 1342, 2089]
 [133, 658, 1001, 1406, 2033]
 [133, 658, 1001, 1583, 1871]
 [133, 658, 1159, 1583, 1729]
 [133, 658, 1342, 1406, 1729]
 [133, 917, 1001, 1159, 2033]
 [133, 917, 1001, 1342, 1871]
 [133, 917, 1159, 1342, 1729]
 [133, 1001, 1159, 1261, 1729]
 [133, 1159, 1261, 1342, 1406]
 [299, 386, 494, 917, 2834]
 [299, 386, 494, 1001, 2783]
 [299, 386, 494, 1261, 2611]
 [299, 386, 494, 1583, 2366]
 [299, 386, 494, 1729, 2242]
 [299, 386, 658, 1583, 2242]
 [299, 386, 917, 1342, 2242]

[299, 386, 917, 1583, 2033]
 [299, 386, 1001, 1261, 2242]
 [299, 386, 1261, 1583, 1729]
 [299, 494, 649, 658, 2834]
 [299, 494, 649, 1001, 2617]
 [299, 494, 649, 1261, 2429]
 [299, 494, 649, 1342, 2366]
 [299, 494, 649, 1729, 2033]
 [299, 494, 658, 1001, 2611]
 [299, 494, 658, 1583, 2158]
 [299, 494, 917, 1001, 2429]
 [299, 494, 917, 1342, 2158]
 [299, 494, 1001, 1159, 2242]
 [299, 494, 1001, 1261, 2158]
 [299, 494, 1001, 1342, 2089]
 [299, 494, 1001, 1406, 2033]
 [299, 494, 1001, 1583, 1871]
 [299, 494, 1159, 1583, 1729]
 [299, 494, 1342, 1406, 1729]
 [299, 649, 658, 1342, 2242]
 [299, 649, 658, 1583, 2033]
 [299, 649, 917, 1342, 2033]
 [299, 649, 1001, 1261, 2033]
 [299, 649, 1261, 1342, 1729]
 [299, 658, 1001, 1583, 1729]
 [299, 658, 1342, 1406, 1583]
 [299, 917, 1001, 1342, 1729]
 [299, 917, 1159, 1342, 1583]
 [299, 1001, 1159, 1261, 1583]
 [299, 1001, 1261, 1342, 1406]
 [386, 494, 649, 658, 2783]
 [386, 494, 649, 917, 2617]
 [386, 494, 649, 1261, 2366]
 [386, 494, 658, 917, 2611]
 [386, 494, 658, 1406, 2242]
 [386, 494, 658, 1583, 2089]
 [386, 494, 917, 1001, 2366]
 [386, 494, 917, 1159, 2242]

[386, 494, 917, 1261, 2158]
[386, 494, 917, 1342, 2089]
[386, 494, 917, 1406, 2033]
[386, 494, 917, 1583, 1871]
[386, 494, 1001, 1261, 2089]
[386, 494, 1261, 1406, 1729]
[386, 649, 658, 1261, 2242]
[386, 649, 917, 1261, 2033]
[386, 658, 917, 1001, 2242]
[386, 658, 917, 1583, 1729]
[386, 658, 1261, 1406, 1583]
[386, 917, 1001, 1261, 1729]
[386, 917, 1159, 1261, 1583]
[386, 917, 1261, 1342, 1406]
[494, 649, 658, 917, 2429]
[494, 649, 658, 1001, 2366]
[494, 649, 658, 1159, 2242]
[494, 649, 658, 1261, 2158]
[494, 649, 658, 1342, 2089]
[494, 649, 658, 1406, 2033]
[494, 649, 658, 1583, 1871]
[494, 649, 917, 1159, 2033]
[494, 649, 917, 1342, 1871]
[494, 649, 1001, 1261, 1871]
[494, 649, 1159, 1261, 1729]
[494, 658, 917, 1001, 2158]
[494, 658, 1001, 1406, 1729]
[494, 658, 1159, 1406, 1583]
[494, 917, 1001, 1159, 1729]
[494, 917, 1159, 1342, 1406]
[494, 1001, 1159, 1261, 1406]
[649, 658, 917, 1001, 2033]
[649, 658, 917, 1342, 1729]
[649, 658, 1001, 1261, 1729]
[649, 658, 1159, 1261, 1583]
[649, 658, 1261, 1342, 1406]
[649, 917, 1159, 1261, 1342]
[658, 917, 1001, 1159, 1583]

[658, 917, 1001, 1342, 1406]

Всего: 165

julia> find_all_lines(1729,7)

33. Просмотрено разных d: 4. Для d = 3, ломаных найдено: 33

[133, 299, 386, 494, 649, 1261, 2033]
[133, 299, 386, 494, 658, 1001, 2242]
[133, 299, 386, 494, 658, 1583, 1729]
[133, 299, 386, 494, 917, 1001, 2033]
[133, 299, 386, 494, 917, 1342, 1729]
[133, 299, 386, 494, 1001, 1261, 1729]
[133, 299, 386, 494, 1159, 1261, 1583]
[133, 299, 386, 494, 1261, 1342, 1406]
[133, 299, 386, 658, 917, 1342, 1583]
[133, 299, 386, 658, 1001, 1261, 1583]
[133, 299, 386, 917, 1001, 1261, 1342]
[133, 299, 494, 649, 658, 1001, 2033]
[133, 299, 494, 649, 658, 1342, 1729]
[133, 299, 494, 649, 1159, 1261, 1342]
[133, 299, 494, 658, 1001, 1159, 1583]
[133, 299, 494, 658, 1001, 1342, 1406]
[133, 299, 494, 917, 1001, 1159, 1342]
[133, 299, 649, 658, 1001, 1261, 1342]
[133, 386, 494, 649, 658, 917, 2033]
[133, 386, 494, 649, 658, 1261, 1729]
[133, 386, 494, 658, 917, 1001, 1729]
[133, 386, 494, 658, 917, 1159, 1583]
[133, 386, 494, 658, 917, 1342, 1406]
[133, 386, 494, 658, 1001, 1261, 1406]
[133, 386, 494, 917, 1001, 1159, 1261]
[133, 386, 649, 658, 917, 1261, 1342]
[133, 494, 649, 658, 917, 1159, 1342]
[133, 494, 649, 658, 1001, 1159, 1261]
[299, 386, 494, 649, 658, 1261, 1583]
[299, 386, 494, 649, 917, 1261, 1342]
[299, 386, 494, 658, 917, 1001, 1583]
[299, 494, 649, 658, 917, 1001, 1342]

```
[386, 494, 649, 658, 917, 1001, 1261]
Всего: 33
```

```
julia> find_all_lines(1729,9)
Всего: 0
Vector{Int64}[]
```

Программа нашла 64 трехзвенных ломаных, длины звеньев которых x удовлетворяют уравнению (14), то есть для них $d = 3$. Она нашла всего 82 трехзвенных ломаных, то есть дополнительно еще 18, для которых $d \neq 3$.

Для пятизвенных нашлись 165 и все только для $d = 3$, а для семизвенных 33 и тоже только для $d = 3$. Девятизвенной не нашлось ни одной.

Приведем статистику количества ломаных для первых 100 сфенических чисел, все простые числа которых имеют вид $3k + 1$.

Сокращенные обозначения в таблице:

$m3$ - число трехзвенных ($d = 3$), $mf3$ - число всех трехзвенных (любое d), $m5$ - число пятизвенных ($d = 3$), $mf5$ - число всех пятизвенных (любое d), $m7$ ($d = 3$), $mf7$ (любое d), $m9$ ($d = 3$), $mf9$ (любое d).

n,	[p, q, r],	(m3, mf3),	(m5, mf5),	(m7, mf7),	(m9, mf9)
1729,	[7, 13, 19],	(64, 82),	(165, 165),	(33, 33),	(0, 0)
2821,	[7, 13, 31],	(64, 84),	(165, 165),	(33, 33),	(0, 0)
3367,	[7, 13, 37],	(64, 84),	(165, 165),	(33, 33),	(0, 0)
3913,	[7, 13, 43],	(64, 87),	(165, 165),	(33, 33),	(0, 0)
4123,	[7, 19, 31],	(63, 96),	(158, 159),	(35, 35),	(1, 1)
4921,	[7, 19, 37],	(64, 94),	(183, 183),	(59, 59),	(1, 1)
5551,	[7, 13, 61],	(65, 92),	(188, 188),	(58, 58),	(1, 1)
5719,	[7, 19, 43],	(64, 102),	(183, 183),	(59, 59),	(1, 1)
6097,	[7, 13, 67],	(64, 87),	(165, 165),	(33, 33),	(0, 0)
6643,	[7, 13, 73],	(64, 87),	(165, 165),	(33, 33),	(0, 0)
7189,	[7, 13, 79],	(64, 92),	(165, 165),	(33, 33),	(0, 0)
7657,	[13, 19, 31],	(64, 110),	(165, 166),	(33, 33),	(0, 0)
8029,	[7, 31, 37],	(65, 101),	(188, 189),	(58, 58),	(1, 1)
8113,	[7, 19, 61],	(63, 100),	(163, 164),	(35, 35),	(0, 0)

8827, [7, 13, 97], (64, 84), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 8911, [7, 19, 67], (64, 100), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 9139, [13, 19, 37], (65, 111), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 9331, [7, 31, 43], (63, 104), (158, 159), (35, 35), (1, 1)
 9373, [7, 13, 103], (63, 89), (158, 158), (35, 35), (1, 1)
 9709, [7, 19, 73], (64, 96), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 9919, [7, 13, 109], (64, 89), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 10507, [7, 19, 79], (64, 101), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 10621, [13, 19, 43], (64, 121), (183, 184), (59, 59), (1, 1)
 11137, [7, 37, 43], (64, 107), (183, 184), (59, 59), (1, 1)
 11557, [7, 13, 127], (65, 94), (188, 189), (58, 58), (1, 1)
 12649, [7, 13, 139], (64, 104), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 12901, [7, 19, 97], (64, 100), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 13237, [7, 31, 61], (64, 107), (165, 166), (33, 33), (1, 1)
 13699, [7, 19, 103], (63, 104), (158, 158), (35, 35), (1, 1)
 13741, [7, 13, 151], (64, 95), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 14287, [7, 13, 157], (65, 97), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 14497, [7, 19, 109], (64, 99), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 14539, [7, 31, 67], (63, 116), (158, 159), (35, 35), (1, 1)
 14833, [7, 13, 163], (63, 96), (158, 158), (35, 35), (1, 1)
 14911, [13, 31, 37], (65, 115), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 15067, [13, 19, 61], (65, 113), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 15799, [7, 37, 61], (63, 108), (163, 164), (35, 35), (0, 0)
 15841, [7, 31, 73], (64, 106), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 16471, [7, 13, 181], (64, 88), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 16549, [13, 19, 67], (64, 115), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 16891, [7, 19, 127], (63, 109), (163, 164), (35, 35), (0, 0)
 17143, [7, 31, 79], (63, 97), (158, 158), (35, 35), (1, 1)
 17329, [13, 31, 43], (64, 122), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 17353, [7, 37, 67], (64, 119), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 17563, [7, 13, 193], (64, 93), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 18031, [13, 19, 73], (64, 114), (183, 185), (59, 59), (1, 1)
 18109, [7, 13, 199], (64, 95), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 18361, [7, 43, 61], (63, 117), (163, 164), (35, 35), (0, 0)
 18487, [7, 19, 139], (64, 106), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 18907, [7, 37, 73], (64, 112), (183, 184), (59, 59), (1, 1)
 19201, [7, 13, 211], (65, 104), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 19513, [13, 19, 79], (64, 121), (165, 165), (33, 33), (0, 0)

20083, [7, 19, 151], (63, 104), (158, 160), (35, 35), (1, 1)
 20167, [7, 43, 67], (64, 117), (165, 167), (33, 33), (0, 0)
 20293, [7, 13, 223], (64, 94), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 20461, [7, 37, 79], (64, 123), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 20683, [13, 37, 43], (65, 128), (188, 189), (58, 58), (1, 1)
 20839, [7, 13, 229], (64, 92), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 20881, [7, 19, 157], (63, 107), (163, 164), (35, 35), (0, 0)
 21049, [7, 31, 97], (64, 116), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 21679, [7, 19, 163], (64, 102), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 21793, [19, 31, 37], (63, 134), (163, 163), (35, 35), (0, 0)
 21931, [7, 13, 241], (65, 93), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 21973, [7, 43, 73], (64, 117), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 22351, [7, 31, 103], (63, 110), (158, 159), (35, 35), (1, 1)
 23653, [7, 31, 109], (64, 101), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 23779, [7, 43, 79], (64, 113), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 23959, [13, 19, 97], (64, 121), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 24073, [7, 19, 181], (64, 103), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 24583, [13, 31, 61], (65, 126), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 24661, [7, 13, 271], (65, 97), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 25123, [7, 37, 97], (64, 123), (165, 167), (33, 33), (0, 0)
 25207, [7, 13, 277], (64, 98), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 25327, [19, 31, 43], (64, 128), (183, 184), (59, 59), (1, 1)
 25441, [13, 19, 103], (64, 136), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 25669, [7, 19, 193], (64, 108), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 25753, [7, 13, 283], (64, 96), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 26467, [7, 19, 199], (64, 95), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 26677, [7, 37, 103], (65, 122), (188, 189), (58, 58), (1, 1)
 26923, [13, 19, 109], (64, 121), (183, 184), (59, 59), (1, 1)
 27001, [13, 31, 67], (64, 134), (165, 167), (33, 33), (0, 0)
 27559, [7, 31, 127], (64, 109), (165, 166), (33, 33), (1, 1)
 27937, [7, 13, 307], (65, 92), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 28063, [7, 19, 211], (63, 111), (163, 163), (35, 35), (0, 0)
 28231, [7, 37, 109], (64, 115), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 28483, [7, 13, 313], (64, 87), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 28609, [7, 61, 67], (65, 123), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 29197, [7, 43, 97], (64, 120), (165, 166), (33, 33), (0, 0)
 29341, [13, 37, 61], (64, 120), (183, 183), (59, 59), (1, 1)
 29419, [13, 31, 73], (65, 123), (188, 188), (58, 58), (1, 1)

29659, [7, 19, 223], (63, 118), (158, 158), (35, 35), (1, 1)
 30121, [7, 13, 331], (65, 92), (188, 188), (58, 58), (1, 1)
 30163, [7, 31, 139], (63, 115), (158, 159), (35, 35), (1, 1)
 30229, [19, 37, 43], (60, 142), (102, 105), (0, 0), (0, 0)
 30457, [7, 19, 229], (64, 106), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 30667, [7, 13, 337], (64, 97), (165, 165), (33, 33), (0, 0)
 31003, [7, 43, 103], (63, 121), (158, 158), (35, 35), (1, 1)
 31171, [7, 61, 73], (63, 120), (163, 163), (35, 35), (0, 0)
 31369, [13, 19, 127], (65, 132), (188, 189), (58, 58), (1, 1)
 31759, [7, 13, 349], (64, 93), (165, 165), (33, 33), (0, 0)

Мы видим здесь определенные закономерности, разбавленные комбинаторными флуктуациями. m_3 держится стабильно в районе 64, m_5 имеет две точки притяжения 165 и 188, m_7 также держится или около 33-х или около 88-ми. Это указывает на то, что комбинаторная структура решений уравнения (14) является высокоустойчивой.

Что касается, ломаных с $d \neq 3$, то они имеют немного больше свободы, их количество меняются, в зависимости от того сколько будет разных d и сколько будет решений общего уравнения (8) для каждого d .

Но это наблюдается только на трехзвенных ломаных, в пятизвенных $d \neq 3$ появляется крайне редко, а в семизвенных и более такого случая не встретилось ни одного.

Число $n = 30229$ показывает, что семизвенных ломаных может не оказаться вообще. И также видно, что для пятизвенных ломаных значения для $n = 30229$ отличаются от обычных.

Продолжение вычислений позволило обнаружить следующие аномалии:

n,	[p, q, r],	(m3, mf3),	(m5, mf5),	(m7, mf7),	(m9, mf9)
30229,	[19, 37, 43],	(60, 142),	(102, 105),	(0, 0),	(0, 0)
42883,	[19, 37, 61],	(57, 131),	(0, 2),	(0, 0),	(0, 0)
49837,	[19, 43, 61],	(60, 143),	(102, 103),	(0, 0),	(0, 0)
51319,	[19, 37, 73],	(60, 134),	(102, 103),	(0, 0),	(0, 0)
54229,	[7, 61, 127],	(60, 122),	(102, 103),	(0, 0),	(0, 0)
59641,	[19, 43, 73],	(60, 164),	(102, 104),	(0, 0),	(0, 0)

67039, [7, 61, 157], (60, 131), (102, 102), (0, 0), (0, 0)
76627, [19, 37, 109], (60, 149), (102, 104), (0, 0), (0, 0)
83731, [31, 37, 73], (60, 153), (102, 104), (0, 0), (0, 0)
84607, [19, 61, 73], (60, 161), (102, 104), (0, 0), (0, 0)
89053, [19, 43, 109], (60, 150), (102, 103), (0, 0), (0, 0)
89281, [19, 37, 127], (57, 158), (0, 4), (0, 0), (0, 0)
90097, [7, 61, 211], (60, 129), (102, 104), (0, 0), (0, 0)

Наблюдаемые флуктуации не являются случайными. Как будет показано далее, они определяются арифметическими свойствами простых множителей p, q, r , в частности, их поведением как квадратичных вычетов по модулю друг друга.

Таким образом, эмпирически подтверждается связь между сфеническими числами n , все простые числа которых имеют вид $3k + 1$, и целочисленными ломаными вписанными в половину окружности радиуса n .

5. Классификация по символам Лежандра и гипотезы

Анализ полученных данных показывает, что отклонения от стандартных значений m_3, m_5, m_7 связаны с арифметическими свойствами простых множителей p, q, r . В частности, ключевую роль играют символы Лежандра $\left(\frac{p}{q}\right), \left(\frac{p}{r}\right), \left(\frac{q}{r}\right)$. Для всех проверенных чисел (2632 комбинации) наблюдается следующая закономерность:

m5	m7	Символы Лежандра	Примеры
165	33	$(-1, 1, -1)$	1729, 2821, 3367, 3913
188	58	$(-1, -1, 1)$	5551, 11557, 14287
183	59	$(1, -1, -1)$	4921, 5719, 9709
158	35	$(-1, -1, -1)$	9373, 14833, 34489
102	0	$(-1, -1, -1)$	30229
102	0	$(1, 1, 1)$	84607
102	0	$(-1, 1, 1)$	51319
102	0	$(-1, -1, 1)$	54229, 83731
0	0	$(-1, 1, -1)$	42883

Гипотеза 1 (эмпирическая классификация). Для большинства сфенических чисел $n = pqr$ с $p, q, r \equiv 1 \pmod{3}$ количество ломаных из 5 и 7 звеньев определяется символами Лежандра между простыми множителями.

Однако существуют редкие исключения (например, $n = 42883$), для которых эта классификация нарушается. Анализ семейства $19 \cdot 37 \cdot p$ показывает, что такие исключения связаны с представлением $p = a^2 + 3b^2$: если b чётное и хотя бы один из символов $(19/p)$ или $(37/p)$ равен $+1$, то $m_5 = 0$.

Это указывает на то, что полная классификация требует учёта дополнительных арифметических инвариантов, таких как представление простых чисел в виде $a^2 + 3b^2$.

Появление ломаных обусловлено количеством звеньев для их построения. Для $d = 3$ (уравнение (14)) их всегда 40 (теорема 4). Это обеспечивает большую стабильность в отношении количества ломаных в случае $d = 3$.

Для разных $d \neq 3$, количество решений уравнения (8) нестабильно. На практике мы часто встречаем 3, 4, 7 и 13 решений но больше этого никогда. Из такого количества решений маловероятно составить вписанную в полуокружность ломаную из семи звеньев. Поэтому мы и не встретили ни одной такой.

Таким образом, можно сформулировать следующую гипотезу:

Гипотеза 2. Для любого сфенического числа $n = pqr$, $p < q < r$, все простые числа которого имеют вид $3k + 1$, семизвенные ломаные, вписанные в полуокружность радиуса n , могут существовать только при $d = 3$.

Количество таких ломаных принимает значения 0, 33, 58 или близко к этим числам и зависит от арифметических свойств простых множителей p, q, r в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

6. Основные результаты

1. Доказана теорема 1 о связи между представлением сфенического числа-такси в виде суммы двух кубов и его простыми множителями.
2. Доказана теорема 2 о том, что все простые множители сфенических чисел-такси имеют вид $3k + 1$.

3. Доказана теорема 3, в которой найдена удобная формула для точной проверки возможности вписать ломаную в половину окружности.
4. Доказана теорема 4 о числе решений уравнения $x^2 + 3y^2 = 4n^2$ для сфенических чисел, все простые числа которых имеют вид $3k + 1$.
5. Обнаружена эмпирическая классификация сфенических чисел по символам Лежандра, определяющая количество ломаных из 5 и 7 звеньев.
6. Сформулирована гипотеза об эмпирической классификации сфенических чисел по символам Лежандра, определяющей количество ломаных из 5 и 7 звеньев, а также выявлены редкие аномалии, требующие учёта дополнительных арифметических инвариантов (представление $p = a^2 + 3b^2$).
7. Сформулирована гипотеза о том, что семизвенные ломаные существуют только при $d = 3$.
8. Приведены численные данные для первых 100 сфенических чисел, все простые числа которых имеют вид $3k + 1$.

Ссылки

- [1] Гуляев Георгий Михайлович Целочисленные циклические многоугольники, вписанные в окружность с целым радиусом // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-134224>.
- [2] Сфеническое число. Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE
- [3] OEIS Foundation Inc. (2026). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Sequence A001235. URL: <https://oeis.org/A001235>
- [4] David A. Cox, Primes of the Form $x^2 + ny^2$: Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication, Second edition: AMS, 2013.
- [5] A. S. Besicovitch, "On the linear independence of fractional powers of integers Journal of the London Mathematical Society, Volume s1-15, Issue 1, January 1940, Pages 3–6.