Треугольник Серпинского: локализация решений и безусловные границы

Георгий Гуляев

28 ноября 2026 г.

Аннотация

В 1961 г. В. Серпинский поставил вопрос о множестве прямоугольных треугольников, все три стороны которых — треугольные числа, и привёл пример треугольника Заранкевича $T_{132}^2 + T_{143}^2 = T_{164}^2$.

Здесь мы доказываем единственность этого треугольника при фиксированной разности $T_c - T_a = 4752$; отсутствие других решений при $T_c - T_a \le 10^9$; полную пустоту трёх из четырёх классов подобия с катетом 156 и единственность в четвёртом; *полную пустоту 159 из 160 примитивных классов подобия с* $h = m^2 + n^2 \le 1000$ *и единственность в оставшемся классе* $(m, n) = (13, 6)$.

Все доказательства основаны на сведении к эллиптическим кривым и вычислительных сертификатах (Magma, Sage, Julia) с приведением полного кода; для класса (27,2), где 2-спуск не замыкается, ранг получен через аналитический ранг и теорему Гросса–Загье–Колывагина. Приведена также параметризация решений бинарными рекуррентами (цепочка Виета) и периодическое сито по модулям.

1. Введение

Треугольные числа определяются равенством $T_n = n(n+1)/2$. Уравнение

$$T_a^2 + T_b^2 = T_c^2 \tag{1}$$

имеет известное нетривиальное решение $(a,b,c)=(132,143,164)$:

$$8778^2+10296^2=13530^2, \qquad (8778,10296,13530)=66\cdot(133,156,205).$$

Этот пример найден Заранкевичем и приведён Серпинским [1,2,3]. Существование других решений, как и полное доказательство их отсутствия, на данный момент неизвестно. В работе [15] автор доказал единственность в классе подобия $(133k,156k,205k)$, $k\in\mathbb{N}$.

Настоящая работа усиливает результат [15] в трёх направлениях: (i) полные вычислительные сертификаты для классов подобия с катетом 156; (ii) проверка всех примитивных классов с $h=m^2+n^2\le 1000$; (iii) параметризация орбитами и периодическое сито.

Используемые методы: сведение к эллиптическим кривым, 2-спуск для ранга, метод эллиптических логарифмов для целых точек, цепочка Виета и периодическое сито.

Замечание. Другой подход к задаче — через квартичный пучок E_d : $y^2=x^3+4d^2(d^2-1)x$, слоями которого являются фиксированные разности $c-a=d$, — позволяет локализовать решения по рангу слоя и по подгруппе, порождённой универсальной точкой. Результаты в этом направлении будут опубликованы в отдельной статье.

2. Параметризация

Лемма 1. *Всякое решение (1) имеет вид* $(T_a,T_b,T_c)=k\,(m^2{-}n^2,\ 2mn,\ m^2{+}n^2)$ *с* $\gcd(m,n)=1$, $m>n>0$, $m\not\equiv n \pmod 2$. *При этом*

$$T_c-T_a=2kn^2, \qquad T_c-T_b=k(m-n)^2, \qquad T_b=2kmn \tag{2}$$

и, полагая $X=2a+1$, $Y=2b+1$, $Z=2c+1$, *имеем*

$$X^2=8k(m^2-n^2)+1,\ Y^2=16kmn+1,\ Z^2=8k(m^2+n^2)+1.$$

Вычитание уравнений для X^2,Y^2,Z^2 даёт полезные равенства

$$Z^2-X^2=16kn^2, \quad Z^2-Y^2=8k(m-n)^2, \quad Y^2-1=16kmn,$$

используемые в дальнейшем.

Доказательство. Используем стандартную параметризацию всех примитивных пифагоровых троек: $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2), (m,n) \in \mathbb{N}^2, m > n, \gcd(m,n) = 1, m \not\equiv n \pmod 2$ и известное тождество для треугольных чисел $8T_n + 1 = (2n+1)^2$. Термин примитивная говорит о том, что $\gcd(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2) = 1$. Любая пифагорова тройка лежит в одном из бесконечного множества классов подобия: $k\,(m^2-n^2,\, 2mn,\, m^2+n^2)$.

Очевидно, $T_c - T_a = k(m^2+n^2) - k(m^2-n^2) = 2kn^2$ и аналогично выводятся остальные два равенства (2). Далее, $X^2 = (2a+1)^2 = 8T_a + 1 = 8k(m^2-n^2) + 1$ и аналогично для Y и Z. Лемма доказана.

3. Элементарные классы: фиксированная разность

Теорема 1. *Единственная пифагорова тройка из треугольных чисел, у которой разность гипотенузы и катета равна* 4752*, — треугольник Серпинского.*

Доказательство. Пусть $T_c - T_a = 4752$. Согласно (2) $kn^2 = 2376$, значит $Z^2 - X^2 = (Z-X)(Z+X) = 16kn^2 = 38016$. Положив $Z - X = 2\alpha$, $Z + X = 2\beta$, получим $\alpha\beta = 9504$ при нечётном $X = \beta - \alpha$ — ровно восемь разложений:

(α, β)	(1,9504)	(3,3168)	(9,1056)	(11,864)	(27,352)	(32,297)	(33,288)	(96,99)
X	9503	3165	1047	853	325	265	255	3
a	4751	1582	523	426	162	132	127	1

Из $kn^2 = 2376 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 11$ следует $n \in \{1,2,3,6\}$ и $k = 2376/n^2 \in \{2376, 594, 264, 66\}$. Условия $k \mid T_a$ и «$T_a/k + n^2$ — квадрат» оставляют лишь $k = 66$, $n = 6$, $T_a = 8778$, $m^2 = 169$, $Y^2 = 82369 = 287^2$. Таким образом, $m = 13, n = 6, k = 66 \Rightarrow k \cdot (m^2-n^2,\, 2mn,\, m^2+n^2) = 66 \cdot (133, 156, 205) = (8778, 10296, 13530)$.

Следствие 1. *(вычислительное; приложение А.) Исчерпывающий перебор $T_c - T_a = N$ при всех $N \le 10^9$ даёт единственное решение* $(132, 143, 164)$*, встречающееся при $N = 3234$ и $N = 4752$.*

Доказательство. $T_b^2 = T_c^2 - T_a^2 = (T_c - T_a)(T_c + T_a) = N \cdot (T_c + T_a)$. Далее, $2N = 2\,(T_c - T_a) = c(c+1) - a(a+1) = (c-a)(c+a+1)$. Алгоритм:

разлагаем $2N$ в произведение двух множителей $2N = d_1 \cdot d_2$ так, чтобы $d_1 + 2 < d_2$ и $d_1 + d_2 \equiv 1 \pmod 2$ и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} c - a = d_1 \\ c + a + 1 = d_2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = (d_2 - d_1 - 1)/2 \\ c = (d_2 + d_1 - 1)/2 \end{cases} .$$

Далее, вычисляем правую часть равенства $T_b^2 = N \cdot (T_c + T_a)$, проверяем ее на квадрат и после извлечения корня на его треугольность. Если все проверки успешны, находим b и выводим решение.

```
julia> sweep(10^9)
(3234, (132, 143, 164))
(4752, (132, 143, 164))
```

Найдено два значения N, дающие один и тот же треугольник. Перебор по всем $N \le 10^9$.

4. Модель класса подобия

Теорема 2. *Пусть (a, b, c) — примитивная пифагорова тройка и $a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2$ — ее параметризация. Решения (1) в классе подобия $k(a, b, c)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с целыми точками эллиптической кривой*

$$E_{(m,n)}:\ V^2 = U\,(U - r_1)\,(U - r_2), \quad r_1 = b(c-a) = 2bn^2,\ r_2 = c(b-a), \tag{3}$$

удовлетворяющими $U > bc,\ U \equiv bc \pmod{8abc}$ и условиям, при которых три числа

$$X^2 = \frac{U}{bc},\ Z^2 = \frac{U - r_1}{ab},\ Y^2 = \frac{U - r_2}{ca}$$

— являются квадратами нечётных целых чисел X, Y, Z. При этом

$$U = bc\,X^2 = bc + 8k\,abc, U - r_1 = ab\,Z^2, U - r_2 = ca\,Y^2, k = (U - bc)/(8abc).$$

Кривая (3) имеет три точки 2-кручения: $(0,0), (r_1,0), (r_2,0)$ (полное рациональное 2-кручение $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$); точка $U = bc$ отвечает вырожденному $k = 0$. Число решений в каждом классе конечно (Зигель) и эффективно определимо при сертифицированной группе Морделла–Вейля.

Доказательство. Пусть в классе $k(a,b,c)$ имеется решение с множителем $k \geq 1$, то есть стороны равны ka, kb, kc. По лемме 1 числа X, Y, Z нечётны, положительны и

$$X^2 = 8ka + 1, \qquad Y^2 = 8kb + 1, \qquad Z^2 = 8kc + 1.$$

Положим $S = 8k\,abc$ и $V = abc\,XYZ$. Тогда

$$S{+}bc = bc(8ka{+}1) = bc\,X^2, S{+}ca = ca(8kb{+}1) = ca\,Y^2, S{+}ab = ab(8kc{+}1) = ab\,Z^2,$$

и перемножение даёт $V^2 = (abc)^2(XYZ)^2 = (S+bc)(S+ca)(S+ab)$ — кубику относительно S.

Сдвиг $U = S + bc$ целочислен, поэтому целочисленность точек сохраняется. Он обращает один множитель в U, а два других — в $U - r_1$ и $U - r_2$, поскольку

$$bc - ab = b(c-a) = 2bn^2 = r_1, \qquad bc - ca = c(b-a) = r_2.$$

Итого $V^2 = U(U - r_1)(U - r_2)$, что и есть (3). При этом

$$U = bc\,X^2, \qquad U - r_1 = S + ab = ab\,Z^2, \qquad U - r_2 = S + ca = ca\,Y^2,$$

а из $U = bc + 8k\,abc$ следует $U > bc$ и $U \equiv bc \pmod{8abc}$; все три частных $U/(bc)$, $(U-r_1)/(ab)$, $(U-r_2)/(ca)$ — квадраты нечётных целых. Прямое соответствие построено.

Кривая (3) невырождена: корни $0, r_1, r_2$ попарно различны. В самом деле, $r_1 = b(c-a) > 0$; далее $r_1 - r_2 = a(c-b) > 0$, так как $c - b$ отвечает $(m-n)^2 > 0$; наконец $r_2 \neq 0$, ибо $b = a$ означало бы $2mn = m^2 - n^2$, то есть $(m-n)^2 = 2n^2$ — невозможное при целом $n \geq 1$. Следовательно $\Delta = 16\,r_1^2 r_2^2 (r_1 - r_2)^2 \neq 0$, и точки $(0,0), (r_1,0), (r_2,0)$ образуют полное рациональное 2-кручение $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Точка $U = bc$ лежит на (3): $bc(bc - r_1)(bc - r_2) = bc \cdot ab \cdot ca = (abc)^2$, то есть $(bc, \pm abc) \in E_{(m,n)}$; она отвечает $X = Y = Z = 1$ и $k = 0$.

Обратно, пусть (U, V) — целая точка (3) с $U > bc$, $U \equiv bc \pmod{8abc}$, и пусть $U/(bc) = X^2$, $(U - r_1)/(ab) = Z^2$, $(U - r_2)/(ca) = Y^2$ — квадраты нечётных целых (берём положительные корни). Положим $k = (U - bc)/(8abc) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда

$$X^2 = \frac{bc + 8k\,abc}{bc} = 8ka{+}1, Z^2 = \frac{U - bc + ab}{ab} = 8kc{+}1, Y^2 = \frac{U - bc + ca}{ca} = 8kb{+}1.$$

Числа $\alpha = (X-1)/2$, $\beta = (Y-1)/2$, $\gamma = (Z-1)/2$ целые неотрицательные, и $T_\alpha = (X^2-1)/8 = ka$, $T_\beta = kb$, $T_\gamma = kc$. Так как $a^2 + b^2 = c^2$, то $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$, то есть получено решение (1) в классе (a, b, c) с множителем k.

Построенные отображения взаимно обратны: $U = bc + 8k\,abc$ строго возрастает по k, поэтому разным k отвечают разные абсциссы, а знаки V и знаки X, Y, Z на решение не влияют. Тем самым соответствие — между решениями класса и абсциссами U, то есть точками с точностью до $\pm V$.

Наконец, (3) — аффинная кривая рода 1, и по теореме Зигеля [13] множество её целых точек конечно. При сертифицированной группе Морделла–Вейля полный список целых точек эффективно находится методом эллиптических логарифмов [11].

5. Четыре класса с катетом 156

Чётный катет $156 = 2mn$ примитивной тройки даёт $mn = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. С учётом $m > n$, $\gcd(m, n) = 1$ и разной чётности остаётся ровно четыре пары:

(m, n)	(a, b, c)	r_1	r_2	$\operatorname{rank} E_{(m,n)}$
$(13, 6)$	$(133, 156, 205)$	11232	4715	3
$(26, 3)$	$(667, 156, 685)$	2808	-350035	2
$(39, 2)$	$(1517, 156, 1525)$	1248	-2075525	2
$(78, 1)$	$(6083, 156, 6085)$	312	-36065795	1

Ранги установлены безусловно: 2-спуск в Magma даёт совпадающие границы RankBounds $= r \ldots r$, что не требует ни GRH, ни гипотезы Бёрча–Свиннертона–Дайера. Те же ранги получены независимо в Sage вызовом `E.gens(proof=True)`.

Теорема 3. *Среди четырёх классов подобия с катетом* 156 *решение (1) существует только в классе* $(133k, 156k, 205k)$*, и там оно единственно:* $k = 66$*, индексы* $(a, b, c) = (132, 143, 164)$*. Остальные три класса решений не содержат.*

Доказательство. По теореме 2 решение класса отвечает целой точке (U, V) кривой (3) с условиями $U > bc$, $U \equiv bc \pmod{8abc}$ и требованием,

чтобы $U/(bc)$, $(U-r_1)/(ab)$, $(U-r_2)/(ca)$ были квадратами нечётных целых. Величины, входящие в критерий:

(m,n)	$(13,6)$	$(26,3)$	$(39,2)$	$(78,1)$
bc	31980	106860	237900	949260
$8abc$	34026720	570204960	2887154400	46194788640

Сертификат полноты состоит из трёх звеньев.

Первое: ранг $\operatorname{rank} E_{(m,n)}(\mathbb{Q})$ доказан 2-спуском безусловно (таблица выше).

Второе: базис группы Морделла–Вейля насыщен — Sage `E.gens(proof=True)` возвращает образующие с доказанной насыщенностью, и их число совпадает с рангом.

Третье: при насыщенном базисе вызов `E.integral_points(mw_base=G, both_signs=True)` реализует метод Стрёкера–Цанакиса [11] с оценкой линейных форм в эллиптических логарифмах по Давиду и LLL-редукцией; полученный список целых точек доказуемо полон.

Тем самым перебор целых точек не является поиском в ограниченной области, а даёт полное множество.

Код и вывод Sage (одна строка на класс: ранг, число целых точек, максимум абсциссы, модуль $8abc$, найденные k):

```
for m,n in [(13,6),(26,3),(39,2),(78,1)]:
    a,b,c = m*m-n*n, 2*m*n, m*m+n*n
    r1,r2 = b*(c-a), c*(b-a)
    E = EllipticCurve([0,-(r1+r2),0,r1*r2,0])
    G = E.gens(proof=True)
    P = E.integral_points(mw_base=G, both_signs=True)
    bc,M = b*c, 8*a*b*c
    K = sorted({(ZZ(p[0])-bc)//M for p in P
                if ZZ(p[0])>bc and (ZZ(p[0])-bc)%M==0})
    print(m,n,len(G),len(P),max(ZZ(p[0]) for p in P),M,K)
```

```
13 6 3 89 2245795500 34026720 [66]
26 3 2 31 14361984 570204960 []
39 2 2 17 19520000 2887154400 []
78 1 1 17 299978330 46194788640 []
```

Число целых точек всюду нечётно, и это не случайность: три точки 2-кручения $(0,0),(r_1,0),(r_2,0)$ целы при любых целых r_1, r_2, а остальные точки разбиваются на пары $\pm V$. Так, $89 = 3 + 2 \cdot 43$, $31 = 3 + 2 \cdot 14$, $17 = 3 + 2 \cdot 7$.

Разберём три класса $(26,3)$, $(39,2)$, $(78,1)$. Наименьшее допустимое значение U, отличное от тривиального, есть $bc+8abc$, и оно равно 570311820, 2887392300, 46195737900 соответственно.

Максимумы абсцисс 14361984, 19520000, 299978330 меньше этих величин, поэтому ни одна целая точка класса не удовлетворяет одновременно $U > bc$ и $U \equiv bc \pmod{8abc}$. Единственная точка с нужным сравнением — тривиальная $U = bc$, отвечающая $k = 0$. Классы решений не содержат.

Класс $(13,6)$ требует отдельного разбора: здесь максимум абсциссы

2245795500 превосходит $bc + 8abc = 34058700$, и сравнение необходимо проверять. Фильтрация даёт ровно одну абсциссу

$$U = 2245795500 = 31980 \cdot 265^2, \qquad k = \frac{U - bc}{8abc} = \frac{2245763520}{34026720} = 66.$$

Все три частных — квадраты нечётных целых:

$$\frac{U}{bc} = 70225 = 265^2, \quad \frac{U - r_1}{ab} = \frac{2245784268}{20748} = 108241 = 329^2,$$

$$\frac{U - r_2}{ca} = \frac{2245790785}{27265} = 82369 = 287^2,$$

откуда индексы $a = (265-1)/2 = 132$, $b = (287-1)/2 = 143$, $c = (329-1)/2 = 164$ и стороны $66 \cdot (133, 156, 205) = (8778, 10296, 13530)$. Других допустимых абсцисс в полном списке нет, что и означает единственность.

Замечание. Функция Magma `IntegralPoints` на классах $(26,3)$, $(39,2)$, $(78,1)$ либо завершается с сообщением «Search bound is too large», либо не завершается за разумное время: LLL-редукция не опускает исходную границу метода эллиптических логарифмов до обозримой и перебор становится невозможным.

Это ограничение реализации, а не пробел в доказательстве: реализация Sage того же метода на этих кривых завершается и даёт доказуемо полные списки. Ранги при этом Magma устанавливает без затруднений, поэтому она использована для независимой проверки первого звена серти-

фиката. Теорема 3 дает новое доказательство единственности треугольника Серпинского в классе подобия $(133k, 156k, 205k)$, $k \in \mathbb{N}$, полученное нами в [15].

6. Все примитивные классы с $h \leq 1000$

Теорема 4. *(вычислительная; приложение B) Среди всех примитивных классов подобия с $h = m^2 + n^2 \leq 1000$ (160 классов) уравнение (1) имеет единственное решение — треугольник Серпинского, отвечающий $(m, n) = (13, 6)$, $k = 66$. Остальные 159 классов пусты.*

Доказательство. Для 159 классов ранг доказан 2-спуском безусловно, базис группы Морделла–Вейля насыщен (`E.gens(proof=True)`), список целых точек получен методом Стрёкера–Цанакиса при сертифицированном базисе (`E.integral_points(mw_base=G, both_signs=True)`). Код и вывод (приложение B):

```
sage: scan(1000)
SOLUTION 13 6 [66]
SKIP 27 2
done
```

Класс $(27, 2)$, где 2-спуск не замыкается, закрыт отдельно (приложение B.2): знак функционального уравнения (корневое число) равен -1, строгая оценка аналитического ранга даёт ≤ 1, откуда аналитический ранг равен 1, и по теореме Гросса–Загье–Колывагина $\operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) = 1$ безусловно. Индекс насыщенности базиса равен 1, образующая $G = (5864, 3665000)$, полный список из 17 целых точек, $\max|x| = 4597376 < bc + 8abc = 459230364$:

```
1 17 4597376 459151200 []
```

Единственная точка с нужным сравнением — тривиальная $U = bc$, отвечающая $k = 0$.

7. Цепочка Виета и периодическое сито

Из системы $bX^2 - aY^2 = (b-a)W^2$, $cX^2 - aZ^2 = 2n^2W^2$ при $X = t - s$, $Z = t + s$ получается $n^2(t^2 + s^2 - 1) = 2m^2st$. Решая относительно t:

$$t = \frac{m^2 s + w}{n^2}, \qquad w^2 - (m^4 - n^4)\, s^2 = n^4. \tag{4}$$

При $n = 1$ это чистая цепочка Виета: $u_{i+1} = 2m^2 u_i - u_{i-1}$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $s = u_i$, $t = u_{i+1}$.

Теорема 5. *(вычислительная; приложение C) Для классов* $(m, n) = (78, 1)$, $(39, 2)$, $(26, 3)$ *перебор по всем орбитам уравнения Пелля* $w^2 - Ds^2 = n^4$, $D = m^4 - n^4$, *до* $j = 10$ *шагов (что даёт* $k \sim 10^{1800}$*) решений не даёт. Для класса* $(39, 2)$ *одна из двух орбит полностью исключена периодическим ситом по модулю 4.*

Доказательство. Цепочка Виета порождает решения уравнения Пелля, лежащие в орбитах, порождённых базовыми решениями `bases_cf` (код см. в приложении C); полнота по всем решениям Пелля не утверждается. Перебор исчерпывающий среди решений, попадающих в эти орбиты. Лемма о препятствии по модулю 4 для $(39, 2)$: база $(w, s) = (1521, 1)$ порождает орбиту, в которой всюду $(w, s) \equiv (1, 1) \pmod 4$ (так как $\varepsilon \equiv 1$, $\eta \equiv 0 \pmod 4$), откуда $m^2 s + w \equiv 2 \pmod 4$ и $t = (m^2 s + w)/n^2$ не цело.

```
# vieta_class(78,1,10)  (no output)
# vieta_class(39,2,10)  (no output)
# vieta_class(26,3,10)  (no output)
# sieve(39,2,5)
# base 1  sign 1  period=2  survive=2
# base 1  sign -1  period=2  survive=2
# base 2  sign 1  period=2  survive=0
# base 2  sign -1  period=2  survive=2
# base 3  sign 1  period=2  survive=2
# base 3  sign -1  period=2  survive=0
# base 4  sign 1  period=2  survive=2
# base 4  sign -1  period=2  survive=2
```

8. Конечность в классах

Теорема 6. *Для каждой фиксированной примитивной тройки* $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ *уравнение (1) имеет лишь конечное число решений* k. *Решения отвечают целым точкам кривой (3), поэтому конечность следует из теоремы Зигеля. При сертифицированной группе Морделла–Вейля число решений эффективно определимо методом эллиптических логарифмов.*

Доказательство. Кривая (3) эллиптическая; целые точки соответствуют решениям с $k = (U - bc)/(8abc) \in \mathbb{Z}_{>0}$. Зигель даёт конечность; метод Стрёкера–Цанакиса [11] даёт эффективное разрешение при известной группе Морделла–Вейля.

9. Итоги (что доказано)

(i) *Единственность при* $T_c - T_a = 4752$ *(теорема 1).*

(ii) *Пустота при* $T_c - T_a \leq 10^9$ *(следствие 1).*

(iii) *Единственность в классе* $(133k, 156k, 205k)$ *(теорема 3).*

(iv) *Пустота классов* $(667k, 156k, 685k)$, $(1517k, 156k, 1525k)$, $(6083k, 156k, 6085k)$ *(теорема 3).*

(v) *Единственность среди всех 160 примитивных классов с* $h \leq 1000$ *(теорема 4).*

Следствие 2. *Любое второе решение (1), если оно существует, должно удовлетворять*: $T_c - T_a > 10^9,\ h > 1000$.

Среда для вычислений. Все вычисления были проведены в SageMath 10.9 (Python 3.14) и Magma V2.22-3 на сервере с 8 ядрами и 32 Гб ОЗУ. Ранги доказаны 2-спуском в Magma (`RankBounds`); для класса $(27, 2)$, где 2-спуск не замыкается, ранг получен через строгую верхнюю оценку аналитического ранга и теорему Гросса–Загье–Колывагина. Полные списки целых точек получены методом Стрёкера–Цанакиса в Sage

(`E.integral_points(mw_base=G, both_signs=True)`) при сертифицированном насыщенном базисе. Все скрипты и выводы приведены в приложениях A–C.

10. Открытые задачи

1. Расширить границу H в теореме 4 до 10^4, 10^5.
2. Доказать гипотезу о конечности числа решений (1) равномерно по всем (m, n).
3. Тетраэдральный аналог.

Приложение A. Перебор разностей (Julia)

```
using Primes
function sweep(n)
  T(x) = div(x*(x+1),2)
  res = Tuple{Int128,Tuple{Int128,Int128,Int128}}[]
  for k in Int128(1):n
    m = 2*k
    for (d1,d2) in filter(x->x[1]+2<x[2]&&sum(x)%2==1,
                      map(x->(x,div(m,x)), divisors(m)))
      a = div(d2-d1-1,2); c = div(d1+d2-1,2)
      ta = T(a); tc = T(c); tb2 = k*(ta+tc)
      tb = isqrt(tb2)
      tb^2==tb2 || continue
      t2 = 8*tb+1
      t = isqrt(t2)
      t^2 == t2 || continue
      b = div(t-1, 2)
      push!(res, (k, (min(a,b), max(a,b), c)))
    end
  end
  res
end
# julia> sweep(10^9)
# (3234, (132, 143, 164))
# (4752, (132, 143, 164))
```

Приложение B. Скан классов (Sage)

B.1. Общий скан $h \le 1000$.

```
from math import gcd, isqrt

def scan(H):
  for m in range(2, isqrt(H)+1):
    for n in range(1, m):
      if m*m+n*n > H: break
      if gcd(m,n) != 1 or (m-n) % 2 == 0: continue
      a,b,c = m*m-n*n, 2*m*n, m*m+n*n
      r1,r2 = b*(c-a), c*(b-a)
      E = EllipticCurve([0,-(r1+r2),0,r1*r2,0])
      bc,M = b*c, 8*a*b*c
      try:
        G = E.gens(proof=True)
        P = E.integral_points(mw_base=G, both_signs=True)
      except Exception:
        print("SKIP", m, n); continue
      K = sorted({(ZZ(p[0])-bc)//M for p in P
      if ZZ(p[0])>bc and (ZZ(p[0])-bc)%M==0})
      if K: print("SOLUTION", m, n, K)
  print("done")

# sage: scan(1000)
# SOLUTION 13 6 [66]
# SKIP 27 2
# done
```

B.2. Класс $(27, 2)$: ранг через аналитический ранг и Колывагина, насыщенный базис.

```
m, n = 27, 2
a, b, c = m*m-n*n, 2*m*n, m*m+n*n
r1, r2 = b*(c-a), c*(b-a)
E = EllipticCurve([0, -(r1+r2), 0, r1*r2, 0])
```

```
print(E.conductor(), E.root_number(), E.analytic_rank_upper_bound())
S = E.saturation(E.gens(proof=False))
print(S)
G = S[0]
P = E.integral_points(mw_base=G, both_signs=True)
bc, M = b*c, 8*a*b*c
K = sorted({(ZZ(p[0])-bc)//M for p in P
            if ZZ(p[0])>bc and (ZZ(p[0])-bc)%M==0})
print(len(G), len(P), max(ZZ(p[0]) for p in P), M, K)

# 393467070 -1 1
# ([(5864 : 3665000 : 1)], 1, 1.14784251774808)
# 1 17 4597376 459151200 []
```

Приложение C. Цепочка Виета и сито (Julia)

```
function bases_cf(D, Ns)
  a0 = isqrt(D)
  m, d, a = BigInt(0), BigInt(1), BigInt(a0)
  p0, p1 = BigInt(1), BigInt(a0)
  q0, q1 = BigInt(0), BigInt(1)
  out = [(BigInt(1), BigInt(0), BigInt(1))]
  while true
    v = p1^2 - D*q1^2
    v in Ns && push!(out, (p1, q1, v))
    v == 1 && break
    m = d*a - m
    d = div(D - m^2, d)
    a = div(a0 + m, d)
    p0, p1 = p1, a*p1 + p0
    q0, q1 = q1, a*q1 + q0
  end
  out
end

function vieta_class(m, n, K)
```

```
  D = BigInt(m)^4 - BigInt(n)^4
  N = BigInt(n)^4
  Ns = [div(N, g^2) for g in 1:n^2 if n^2 % g == 0]
  cf = bases_cf(D, Ns)
  e, f = cf[end][1], cf[end][2]
  m2, n2 = BigInt(m)^2, BigInt(n)^2
  for (p, q, v) in cf, sg in (1, -1)
    g = isqrt(div(N,v))
    w, s = sg*g*p, g*q
    for j in 0:K
      if s >= 0 && (m2*s + w) % n2 == 0
        t = div(m2*s + w, n2)
        if t > s && (s*t) % (4n2) == 0
          k = div(s*t, (4n2))
          Y2 = div(4*BigInt(m)*s*t, n) + 1
          r = isqrt(Y2)
          if r*r == Y2 && k > 0
            println("m=", m, " n=", n, "  k=", k)
          end
        end
      end
      w, s = e*w + D*f*s, f*w + e*s
    end
  end
end
# vieta_class(78,1,10)  (no output)
# vieta_class(39,2,10)  (no output)
# vieta_class(26,3,10)  (no output)

function sieve(m, n, p)
  D = BigInt(m)^4 - BigInt(n)^4
  N = BigInt(n)^4
  Ns = [div(N, g^2) for g in 1:n^2 if n^2 % g == 0]
  cf = bases_cf(D, Ns)
  e, f = cf[end][1], cf[end][2]
  m2, n2 = BigInt(m)^2, BigInt(n)^2
  M = BigInt(4*n^4*p)
  em, fm, Dm = mod(e,M), mod(f,M), mod(D,M)
```

```
  ni = powermod(n % p, p-2, p)
  for (i,(pp,qq,v)) in enumerate(cf), sg in (1,-1)
    g = isqrt(div(N, v))
    w, s = mod(sg*g*pp, M), mod(g*qq, M)
    w0, s0 = w, s
    cnt = 0; per = 0
    while true
      per += 1
      a = mod(m2*s + w, M)
      if mod(a, n2) == 0
        tf = div(a, n2)
        if mod(s*mod(tf,4n2), 4n2) == 0
          y2 = Int(mod(4*BigInt(m)*mod(s,p)*mod(tf,p)*ni + 1, p))
          if y2 == 0 || powermod(y2, div(p-1, 2), p) == 1
            cnt += 1
          end
        end
      end
      w, s = mod(em*w + Dm*fm*s, M), mod(fm*w + em*s, M)
      (w,s) == (w0,s0) && break
    end
    println("base ", i, "  sign ", sg, "  period=", per, "  survive=", cnt)
  end
end
# julia> sieve(39,2,5)
# base 1  sign 1  period=2  survive=2
# base 1  sign -1  period=2  survive=2
# base 2  sign 1  period=2  survive=0
# base 2  sign -1  period=2  survive=2
# base 3  sign 1  period=2  survive=2
# base 3  sign -1  period=2  survive=0
# base 4  sign 1  period=2  survive=2
# base 4  sign -1  period=2  survive=2
```

Список литературы

[1] W. Sierpiński. Sur les nombres triangulaires carrés. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **30** (1961), 189–194.

[2] W. Sierpiński. Elementary Theory of Numbers. Warszawa, 1964.

[3] D.W. Ballew, R.C. Weger. Pythagorean triples and triangular numbers. Fibonacci Quart. **17** (1979), 168–171.

[4] M. Ulas. On certain diophantine equations related to triangular and tetrahedral numbers. arXiv:0811.2477.

[5] B. He, A. Togbé, M. Ulas. On the Diophantine equation $z^2 = f(x)^2 \pm f(y)^2$, II. Bull. Aust. Math. Soc. **82** (2010), 187–204.

[6] M. Ulas, A. Togbé. On the Diophantine equation $z^2 = f(x)^2 \pm f(y)^2$. Publ. Math. Debrecen **76** (2010), 183–201.

[7] Sz. Tengely, M. Ulas. On certain Diophantine equations of the form $z^2 = f(x)^2 \pm g(y)^2$. J. Number Theory **174** (2017), 239–257.

[8] Y. Li, Y. Zhang. Primitive Pythagorean triangles with sides of certain forms. Integers **24** (2024), #A31.

[9] MathOverflow, вопрос 187051; PrimePuzzles, Problem 81; NRICH «Triangular Triples».

[10] R.J. Stroeker. On the sum of consecutive cubes being a perfect square. Compositio Math. **97** (1995), 295–316.

[11] R.J. Stroeker, N. Tzanakis. Solving elliptic Diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms. Acta Arith. **67** (1994), 117–145.

[12] J. Silverman. The Arithmetic of Elliptic Curves. 2nd ed., Springer, 2009.

[13] C.L. Siegel. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abh. Preuss. Akad. Wiss. (1929), Nr. 1.

[14] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[15] Г.М. Гуляев. Единственность треугольника Серпинского // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: https://arxivorg.ru/a/AX-136379.