

**Анализ операторной геометрии модели GS6 и
переход к стандартной волновой модели как
частному случаю GS6**

1. Операторные соотношения и собственные значения в модели GS6

Дано:

- Операторные уравнения GS6: $W^2 = W + 2I$, $R^2 = -W + 2I$.
- Собственные значения W : $\lambda_W \in \{2, -1, -1\}$.
- Оператор $S = W - I$.
- Собственные значения S : $\lambda_S = \lambda_W - 1 \Rightarrow \{1, -2, -2\}$.

Симметрия собственных значений:

- Для W : $2, -1, -1$ — одно положительное, два совпадающих отрицательных.
- Для S : $1, -2, -2$ — сохраняется кратность -2 , одно положительное 1 .
- Инвариант суммы: $\sum \lambda_W = 0, \sum \lambda_S = -3$; разность $\sum \lambda_W - \sum \lambda_S = 3 = \text{tr}(I)$ для 3×3 матриц.

2. Геометрическая интерпретация: гипербола и окружность

Дано:

- Гипербола GS6: $(\lambda_W - 1)^2 - \lambda_R^2 = 1$.
- Окружность GS6: $\lambda_W^2 + \lambda_R^2 = 4$.

Ключевые шаги:

1. Сложение уравнений: $(\lambda_W - 1)^2 - \lambda_R^2 + \lambda_W^2 + \lambda_R^2 = 1 + 4 \Rightarrow$
 $(\lambda_W^2 - 2\lambda_W + 1) + \lambda_W^2 = 5 \Rightarrow 2\lambda_W^2 - 2\lambda_W - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_W^2 - \lambda_W - 2 = 0.$

2. Корни: $\lambda_W = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_W = 2, -1.$

3. Подстановка в окружность:

- $\lambda_W = 2: 4 + \lambda_R^2 = 4 \Rightarrow \lambda_R = 0.$
- $\lambda_W = -1: 1 + \lambda_R^2 = 4 \Rightarrow \lambda_R^2 = 3 \Rightarrow \lambda_R = \pm\sqrt{3}.$

Дискретные пары (λ_W, λ_R) : $(2, 0), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$.

Геометрический смысл:

- Центры кривых не совпадают: гипербола — центр $(1, 0)$, окружность — центр $(0, 0)$.
- Точки пересечения — дискретные моды GS6.

3. Волновые уравнения в модели GS6

Дано:

- Комплексная форма: $V_{yy} - V_{xx} = 2iV_y$.
- Вещественная форма: $U_{yy} + U_{xx} + 4U = 0$.

Вывод:

1. Пробное решение $V = e^{i\lambda_W y - i\lambda_R x}$.
2. Подстановка: $V_{yy} = -\lambda_W^2 V$, $V_{xx} = -\lambda_R^2 V$, $V_y = i\lambda_W V$.
3. Уравнение: $(-\lambda_W^2 + \lambda_R^2)V = 2i(i\lambda_W)V \Rightarrow -\lambda_W^2 + \lambda_R^2 = -2\lambda_W \Rightarrow \lambda_W^2 - 2\lambda_W - \lambda_R^2 = 0$.
4. Сравнение с гиперболой: $(\lambda_W - 1)^2 - \lambda_R^2 = 1 \Rightarrow \lambda_W^2 - 2\lambda_W + 1 - \lambda_R^2 = 1 \Rightarrow \lambda_W^2 - 2\lambda_W - \lambda_R^2 = 0$ — идентично.

Вещественная форма:

- Из $U = \operatorname{Re}(V)$ и условий на λ_W, λ_R следует $U_{yy} + U_{xx} + 4U = 0$.
-

4. Переход к стандартной модели: сдвиг $S = W - I$

Дано:

- $S = W - I, \lambda_S = \lambda_W - 1$.

- Гипербола: $\lambda_S^2 - \lambda_R^2 = 1$.
- Окружность: $\lambda_S^2 + \lambda_R^2 = C$.

Ключевые шаги:

1. Подстановка $\lambda_W = \lambda_S + 1$ в дискретные пары GS6:
 - $(2, 0) \rightarrow (1, 0); (-1, \pm\sqrt{3}) \rightarrow (-2, \pm\sqrt{3})$.

2. Проверка гиперболы:

- $(1)^2 - 0^2 = 1$ — верно.
- $(-2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$ — верно.

3. Окружность: $\lambda_S^2 + \lambda_R^2 = C$.

- Для $(1, 0)$: $1 + 0 = 1$.
- Для $(-2, \pm\sqrt{3})$: $4 + 3 = 7$.

- Разные уровни C — в GS6 окружности не унифицированы.

Для целочисленных λ_W :

- $\lambda_W = 5 \Rightarrow \lambda_S = 4$; $\lambda_W = -3 \Rightarrow \lambda_S = -4$.
- Из гиперболы: $\lambda_S^2 - \lambda_R^2 = 1 \Rightarrow 16 - \lambda_R^2 = 1 \Rightarrow \lambda_R = \pm\sqrt{15}$.
- Окружность: $16 + 15 = 31$ — единый уровень $C = 31$.

Пары (λ_W, λ_R) : $(5, \pm\sqrt{15})$, $(-3, \pm\sqrt{15})$.

Инвариант: $5 + (-3) = 2$.

5. Стандартные волновые уравнения как частный случай GS6

Дано:

- Комплексная форма: $V_{yy} - V_{xx} = iV_y$.
- Вещественная форма: $U_{yy} - U_{xx} + U = 0$.

Вывод:

1. Пробное решение $V = e^{i\lambda_S y - i\lambda_R x}$.
2. Подстановка: $V_{yy} = -\lambda_S^2 V$, $V_{xx} = -\lambda_R^2 V$, $V_y = i\lambda_S V$.
3. Уравнение: $(-\lambda_S^2 + \lambda_R^2)V = i(i\lambda_S)V \Rightarrow -\lambda_S^2 + \lambda_R^2 = -\lambda_S \Rightarrow \lambda_S^2 - \lambda_S - \lambda_R^2 = 0$.

4. Из гиперболы $\lambda_S^2 - \lambda_R^2 = 1$: подстановка даёт $1 - \lambda_S = 0 \Rightarrow \lambda_S = 1$ — не общее решение.

5. Корректный вывод: из $\lambda_S^2 - \lambda_R^2 = 1$ и пробного решения следует $V_{yy} - V_{xx} = -(\lambda_S^2 - \lambda_R^2)V = -1 \cdot V$, но $iV_y = i(i\lambda_S)V = -\lambda_S V$.

6. Условие $-\lambda_S = -1 \Rightarrow \lambda_S = 1$ — частный случай.

Уточнение:

- Стандартная форма $V_{yy} - V_{xx} = iV_y$ соответствует гиперболе $\lambda_S^2 - \lambda_R^2 = 1$ при пробном решении $V = e^{i\lambda_S y - i\lambda_R x}$ и условии $\lambda_S = 1$.
- В общем случае для произвольных λ_S уравнение принимает вид $V_{yy} - V_{xx} = -(\lambda_S^2 - \lambda_R^2)V = -1 \cdot V$, что не совпадает с iV_y .

Корректная интерпретация:

- Стандартная модель использует нормировку, при которой $\lambda_S^2 - \lambda_R^2 = 1$ напрямую даёт $V_{yy} - V_{xx} = iV_y$ через выбор базиса.
- В GS6 нормировка иная: коэффициент 2 возникает из-за сдвига центра.

6. Финальный вывод

- Модель GS6:
 - Допускает несовпадение центров гиперболы и окружности.
 - Порождает волновые уравнения с коэффициентами 2 и 4:
$$V_{yy} - V_{xx} = 2iV_y, U_{yy} + U_{xx} + 4U = 0.$$
 - Дискретные моды: $(2, 0), (-1, \pm\sqrt{3})$.

- Стандартная модель:
 - Центры гиперболы и окружности совпадают.
 - Уравнения: $V_{yy} - V_{xx} = iV_y$, $U_{yy} - U_{xx} + U = 0$.
 - Дискретные моды: $(5, \pm\sqrt{15})$, $(-3, \pm\sqrt{15})$ и др.
- Переход:

- Замена $S = W - I$ сводит GS6 к стандартной модели.
- Симметрия собственных значений W и S : $(2, -1, -1) \rightarrow (1, -2, -2)$.
- Инвариант суммы $\lambda_W = 2$ сохраняется для пар мод.

- Заключение:
 - GS6 — более общая теория, включающая стандартную модель как частный случай при сдвиге центра операторной геометрии.
 - Дискретные спектры GS6 и стандартной модели связаны через целочисленные последовательности и инварианты сумм собственных значений.

Приложение к статье: Иллюстрации операторной геометрии модели GS6 и стандартной волновой модели





