Неоднородность векторного поля и квантовая статистика элементарных частиц

Бабаев Алимжан Холмуратович

Аннотация: В статье рассматривается взаимосвязь между неоднородностью векторного поля и квантовой статистикой частиц. Доказывается, что причиной существования (наличия) только двух типов частиц (фермионов и бозонов) являются деформация и вращение неоднородности поля А.

Abstract: In the paper the relation between vector field inhomogeneity and particle quantum statistics is considered. It is proved that the reason for the existence (presence) of only two types of particles (fermions and bosons) is the deformation and rotation of the inhomogeneity of the field.

Ключевые слова: неоднородность; вращение; деформация поля; квантовая статистика; фермионы; бозоны; бикватернионы; бивектор; принцип Паули; тождественность частиц

Keywords: inhomogeneity; rotation; deformation of field; quantum statistics; fermions; bosons; biquaternions; bivector; the Pauli principle; particles identity

УДК 537.8: 512.7

Введение

Ранее мы показали [**1**], что локальную неоднородность векторного поля

$$B=\nabla A=\nabla\bullet A+\nabla\wedge A \tag{1}$$

можно представить в виде суммы трёх независимых бикватернионов в 4-х мерном пространстве Минковского:

$$B=\Sigma^{3}_{\alpha=1}\mathrm{B}_{\alpha} \tag{2}$$

где

$\nabla\bullet A=Eg^{ij}\partial_i A_j$ – деформация векторного поля, т.е. симметричная часть Клиффордово произведения векторов [**2**] ∇ и A; g^{ij} – метрический тензор;

$\nabla\wedge A=e^i\wedge e^j\partial_i A_j$ – вращение векторного поля , т.е. антисимметричная часть Клиффордово произведения векторов ∇ и A [**2**];

“•” и “∧” – символы внутреннего и внешнего произведения векторов; E – единичная 4х4 матрица; $\nabla=\gamma^i\,\partial_i$ – оператор набла; γ^i, $\gamma^5=i\gamma=i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$ – матрицы Дирака.

Здесь и далее используется естественная система единиц, где скорость света и постоянная Планка равны единице: c=h/2π=1.

Было доказано [**3**], что локальная неоднородность (1), которая состоит из независимых деформации и вращения, порождает фотон-нейтринную пару. Причем, деформация поля порождает фотон, т.е. бозон, а вращение порождает пару нейтрино - антинейтрино, т.е. фермион. Но это утверждение не было рассмотрено в обобщенном виде и не была детально изучена квантовая систематика частиц, порождаемых неоднородностью.

В данной работе мы исследуем взаимосвязь неоднородности векторного поля A ($\nabla\bullet A$ и ∇^A) с квантовыми свойствами частиц (спинами). Проще говоря, мы попытаемся выяснить: как, почему и откуда возникают только два вида частиц – бозоны и фермионы.

В «плоском» пространстве существует такой бикватернион, который можно выразить в виде матричной функции (экспоненты) [**4,** стр. 46 – 52]:

$$B_\alpha = \exp((\gamma^0\gamma^\alpha + \gamma)Z_\alpha) \qquad (3)$$

В общем случае $Z_\alpha = Z_\alpha(q^i)$ – комплексная функция от аргументов $\{q^i\} = \{t, x, y, z\}$.

Результаты

Так как неоднородность поля (1) состоит из двух независимых частей, то бикватернион (3) рассмотрим сначала только с вращением, а затем только с деформацией.

1. Вращение

$$B_\alpha = \exp(\gamma^0\gamma^\alpha Z_\alpha) \qquad (4)$$

Выражение (4) разложим на биспинор и антибиспинор:

$$\exp(\gamma^0\gamma^\alpha Z_\alpha) = 0.5(E+\gamma^0\gamma^\alpha)\exp(Z_\alpha) + 0.5(E-\gamma^0\gamma^\alpha)\exp(-Z_\alpha) = \Upsilon_\alpha(x) + \tilde{\Upsilon}_\alpha(x) \qquad (5)$$

где $\Upsilon_\alpha(x)$ – биспинор, $\tilde{\Upsilon}_\alpha(x)$ – антибиспинор [**4,** стр. 62 – 66].

Утверждение 1

Вращение $B_\alpha = \nabla\wedge A = \exp(\gamma^0\gamma^\alpha Z_\alpha)$ векторного поля A порождает фермионы.

Доказательство.

1) $\Upsilon_\alpha(x)$ и $\tilde{\Upsilon}_\alpha(x)$ являются положительными и отрицательными биспинорами, т.к. удовлетворяют условиям существования идеала теории групп (кольца) [**4,** стр. 62 – 66], т.е. спиноров. Действительно, умножая биспинор (антибиспинор) на , из (5) получим

$$\gamma^0\gamma^\alpha\Upsilon_\alpha(x) = \Upsilon_\alpha(x) \quad \text{и} \quad \gamma^0\gamma^\alpha\tilde{\Upsilon}_\alpha(x) = -\tilde{\Upsilon}_\alpha(x).$$

Другими словами, $\Upsilon_\alpha(x)$ и $\tilde{\Upsilon}_\alpha(x)$ являются положительными и отрицательными биспинорами, которые описывают фермионы (частицу и античастицу).

2) Вращение поля – антисимметричная часть неоднородности, т.е. $\nabla\wedge A = e^i\wedge e^j\partial_i A_j$ – комплексный бивектор, в частности, тензор электромагнитного поля F. Так как $\Upsilon_\alpha(x)$, $\tilde{\Upsilon}_\alpha(x)$ есть матричная экспоненциальная форма записи вращения, то волновые функции $\Upsilon_\alpha(x)$, $\tilde{\Upsilon}_\alpha(x)$, описывающие фермионы, должны быть тоже антисимметричны.

Рассмотрим волновую функцию системы из двух тождественных невзаимодействующих частиц (из двух вращений $\Upsilon_\alpha(x)$):

$$\Upsilon_{\alpha,\beta}(p, q) = \Upsilon_\alpha(p)\,\Upsilon_\beta(q) \sim (\boldsymbol{p}/2p_0)\wedge(\boldsymbol{q}/2q_0) = -(\boldsymbol{q}/2q_0)\wedge(\boldsymbol{p}/2p_0) \sim \Upsilon_\beta(q)\,\Upsilon_\alpha(p) = \Upsilon_{\beta,\alpha}(q, p) \quad \text{или}$$

$$\Upsilon_\alpha(p)\wedge\Upsilon_\beta(q) = -\Upsilon_\beta(q)\wedge\Upsilon_\alpha(p) \qquad (6)$$

где внешнее произведение $\Upsilon_\alpha(p)\wedge\Upsilon_\beta(q)$ по определению антисимметрично.

Здесь $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – пространственные импульсы двух тождественных частиц, определяемые биспинорами $\Upsilon_\alpha(x)$ и $\tilde{\Upsilon}_\alpha(x)$.

Из (6) видно, что волновая функция суперпозиции систем из двух тождественных невзаимодействующих частиц меняет знак на противоположный при перестановке частиц, т.е. данные частицы (описываемые $\Upsilon_\alpha(x)$ и $\Upsilon_\beta(x)$ – фермионы.

Утверждение 1 доказано.

2. Деформация

$$B_\alpha = \exp(\gamma Z_\alpha) \tag{7}$$

Выражение (7) разложим

$$\exp(\gamma Z_\alpha) = 0.5(E+\gamma)\exp(Z_\alpha) + 0.5(E-\gamma)\exp(-Z_\alpha) = V_\alpha(x) + \tilde{V}_\alpha(x) \tag{8}$$

где $V_\alpha(x)$ – вектор-функция, $\tilde{V}_\alpha(x)$ – "анти" вектор-функция.

Утверждение 2

Деформация $\nabla \bullet A = \exp(\gamma Z_\alpha)$ векторного поля A порождает бозоны.

Доказательство.

1) $V_\alpha(x)$ и $\tilde{V}_\alpha(x)$ не являются биспинорами, т.к. не удовлетворяют условиям идеалов теории групп (колец) [**4,** стр. 62 – 66]. Действительно, из (8) получим

$$\gamma V_\alpha(x) = \gamma\, 0.5(E+\gamma)\exp(Z_\alpha) = -\,0.5(E-\gamma)\exp(Z_\alpha) \neq V_\alpha(x)$$

$$\text{и } \gamma\tilde{V}_\alpha(x) \neq \tilde{V}_\alpha$$

Другими словами, $V_\alpha(x)$ и $\tilde{V}_\alpha(x)$ не являются биспинорами и не описывают фермионы.

2) В общем виде деформация поля – симметричная часть неоднородности поля A, т.е. внутреннее произведение, комплексный "скаляр" (скаляр + псевдоскаляр).

$$\nabla \bullet A = e^i \bullet e^j\, \partial_i A_j$$

Так как $V_\alpha(x)$, $\tilde{V}_\alpha(x)$ есть матричная экспоненциальная форма записи деформации, то волновая функция $V_\alpha(x)$, $\tilde{V}_\alpha(x)$, описывающая частицу, должна быть симметричной.

Рассмотрим волновую функцию системы из двух тождественных невзаимодействующих частиц (из двух деформаций):

$$V_{\alpha,\beta}(p,q) = V_\alpha(p)\, V_\beta(q) \sim (\boldsymbol{p}/2p_0) \bullet (\boldsymbol{q}/2q_0) = (\boldsymbol{q}/2q_0) \bullet (\boldsymbol{p}/2p_0) \sim V_\beta(q) V_\alpha(p) = V_{\beta,\alpha}(q,p)$$

или

$$V_\alpha(p) \bullet V_\beta(q) = V_\beta(q) \bullet V_\alpha(p) \tag{9}$$

где внутреннее произведение $V_\alpha(p) \bullet V_\beta(q)$ по определению симметрично.

Здесь $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ – пространственные импульсы двух тождественных частиц.

Из (9) видно, что волновая функция суперпозиции систем из двух тождественных невзаимодействующих частиц не меняется от перестановки частиц, т.е. частицы, описываемые функциями $V_\alpha(x)$ и $V_\beta(x)$ – бозоны.

Утверждение 2 доказано.

В общем виде

$$P_{i,j}\chi(p_i, p_j) = \mp\, \chi(p_i, p_j) \tag{10}$$

где знак «-» соответствует вращению поля (фермиону) – антисимметричной функции; знак «+» соответствует деформации поля (бозону) – симметричной функции; $P_{i,j}$ – оператор перестановки; $\chi(p_i, p_j)$ – волновая функция системы двух невзаимодействующих частиц.

Обсуждения и выводы

Главной и единственной причиной существования (наличия) только двух видов частиц – фермионов и бозонов является неоднородность поля, точнее, вращение и деформация поля. Неоднородность (вращение, деформация) поля есть геометрическая трактовка квантовой статистики частиц и принципа Паули [**5**].

Наличие только трех «направлений» ($(\gamma^0\gamma^\alpha + \gamma)Z_\alpha$, $\alpha=1,2,3$) в 4х мерном пространстве указывает на то, что фермионы и бозоны имеют только три поколения. Проще говоря, каждому поколению фермионов соответствует «свое поколение» бозонов.

Библиографический список:

1. Бабаев А. Х. Бикватернионы, вращения и спиноры в обобщенной алгебре Клиффорда, sci-article.ru, №45 (май) 2017, стр.296 – 304.

2. Chris J. L. Doran. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College. A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge. February 1994, pages 4-6.

3. Бабаев А. Х. Вывод уравнения Дирака из неоднородности пространства и решение для поколений нейтрино, sci-article.ru, №25 (декабрь) 2017, стр. 237 – 244.

4. Казанова Г. Векторная алгебра, перевод с фр. Изд. «МирР», М., 1979

5. Паули В. Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда // Нильс Бор и развитие физики. — М.: 1958. — с. 46-74