

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

Гуляев Георгий Михайлович

УДК 517.5

СУММИРОВАНИЕ КРАТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И
АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

01.01.01 - математический анализ

диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
А.И. Янушаускас

Новосибирск 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
§ 0.1. История вопроса и краткий обзор литературы	4
§ 0.2. Изложение основных результатов	8
 Глава 1. Аналитическое продолжение степенных рядов	21
§ 1.1. Вспомогательные утверждения	21
§ 1.2. Интегральное представление для суммы степенного ряда	27
§ 1.3. Примеры	35
§ 1.4. n - звездные области в $\mathbb{C}^n$	39
§ 1.5. Аналитическое продолжение кратных степенных рядов	45
 Глава 2. Кратные ряды многочленов	51
§ 2.1. Общий класс многочленов многих комплексных переменных ...	51
§ 2.2. Разложение функций голоморфных в начале координат в ряды полиномов. Одномерный случай	57
§ 2.3. Разложение функций голоморфных в начале координат в ряды полиномов. Многомерный случай	66
§ 2.4. Представление целых функций многих комплексных переменных рядами полиномов	72
§ 2.5. Суммирование полиномиальных разложений	80
 Литература	85

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы изучения представления аналитических функций $f(z)$ функциональными рядами и связи между коэффициентами таких рядов и самой функцией $f(z)$ относятся к фундаментальным проблемам классического анализа.

Среди функциональных рядов наиболее простыми и удобными для приложений являются ряды по полиномам.

В случае одной комплексной переменной имеется много интересных результатов о представлении аналитических функций полиномиальными рядами, которые можно найти в монографиях Сеге Г. [21], Боаса Р.П. и Бака Р.К. [35], Суетина П.К. [23].

Иначе дело обстоит с кратными рядами по многочленам. В литературе мы довольно часто встречаем различные многочлены, зависящие от многих переменных, однако лишь эпизодически изучаются вопросы сходимости, а тем более суммируемости, рядов по ним, а также вопросы представления голоморфных функций такими рядами.

Отсутствует набор достаточно простых многочленов многих переменных, по которым могли бы быть разложены функции, голоморфные в определенных областях пространства $\mathbb{C}^n$.

§ 0.1. История вопроса и краткий обзор литературы

Одной из наиболее важных теорем в теории аналитического продолжения рядов Тейлора является хорошо известная классическая теорема Адамара об умножении особенностей [42].

Согласно этой теореме, композиция по Адамару

$$a * b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n,$$

сходящихся в окрестности начала координат рядов

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{и} \quad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

голоморфно продолжается в область $A \odot B = (A' \cdot B)'$, называемую Биберахом [8] звездой-произведением. Здесь A обозначает звезду Миттаг-Леффлера функции $a(z)$, а B — звезду Миттаг-Леффлера функции $b(z)$,

$$A' = \mathbb{C} \setminus A, \quad B' = \mathbb{C} \setminus B, \quad A' \cdot B = \{z \cdot \omega : z \in A', \omega \in B'\}.$$

Осуществляется это голоморфное продолжение при помощи деформации контура Γ в интегральном представлении

$$a * b(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} a(\zeta) b\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (0.1)$$

где Γ , соответствующим образом выбранная, замкнутая, спрямляемая, жорданова кривая.

Заметим, что $A \odot B$, вообще говоря, меньше звезды Миттаг-Леффлера функции $a * b(z)$. В монографии Бибераха [8] приводятся соответствующие примеры.

Весьма плодотворной для приложений оказалась следующая модификация интегрального представления (0.1), используемая в книге Боаса и Бака [35].

Приводя этот результат, мы, в целях удобства, объединим две теоремы 13.3 и 13.5 монографии [35] и сделаем замену переменных $\zeta = \omega^{-1}$.

Теорема Б (Боас, Бак). Допустим, что голоморфная в начале координат функция

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n$$

удовлетворяет двум условиям:

- α) функция $\Psi(t)$ голоморфно продолжается в область $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$;
- β) все коэффициенты ее ряда Тейлора $\Psi_n, n = 0, 1, \dots$ отличны от нуля и разрешима проблема моментов Хаусдорфа

$$\frac{1}{\Psi_n} = \int_0^1 u^n d\mu(u), \quad \text{Var}_0^1 \mu(u) < \infty.$$

Пусть далее

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

любая, голоморфная в начале координат, функция и M_f - ее звезда Миттаг-Леффлера. Тогда для любого компакта $K \subset M_f$ найдется замкнутая, спрямляемая, жорданова кривая $\Gamma \subset M_f \setminus K$, разделяющая компакт K и точку ∞ , такая, что для всех $z \in K$ имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\zeta) \cdot \Psi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (0.2)$$

где функция $g(\zeta)$ определяется своим разложением в ряд

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Psi_n} \zeta^n.$$

Таким образом, формула (0.2) позволяет продолжить голоморфно функцию $f(z)$ в ее звезду Миттаг-Леффлера.

В 1958 году вышло в свет первое издание монографии [35], в которой был продемонстрирован общий подход к разложению в ряды полиномов целых, а также голоморфных в начале координат, функций одной комплексной переменной.

Следует заметить, что до 1958 года, несмотря на обилие полиномов и

имевшейся о них информации, лишь в отдельных случаях существовали не связанные между собой приемы получения разложений голоморфных функций в ряды по ним.

Большинство полиномов, введенных тем или иным способом в литературу, обладают простыми производящими соотношениями.

Именно благодаря использованию производящих соотношений, а также интегрального представления (0.2), Боасом и Баком была создана достаточно общая теория разложения голоморфных в нуле функций в ряды полиномов ([35], глава 3).

Эта теория наряду с ее достоинствами имеет следующие недостатки.

Во-первых, она не применима для тех полиномов, естественная область сходимости разложений по которым, не звездная (для полиномов Фабера, например).

Во-вторых, даже при условии звездности областей сходимости, некоторые важные полиномы остались за пределами действия этой теории. Так случилось, например, с полиномами Якоби.

И хотя в § 17 монографии [35] Боас и Бак применяют свою теорию к полиномам Якоби и даже получают правильный результат, в их рассуждениях имеется ошибка (см. § 2.2 настоящей диссертации).

Отметим, что оба названных недостатка связаны с несовершенностью теоремы Б.

Боас и Бак наряду со сходящимися рассматривают также и суммируемые некоторыми методами полиномиальные ряды.

Суммирование и аналитическое продолжение полиномиальных рядов в одномерном случае исследовали также Коулинг и Кинг [37], Якимовски [44, 45], Яцун В.А. [33], Гариботти и Гринстейн [40], Бойчев [36].

Общий обзор методов суммирования и работ относящихся к суммированию числовых, а также одномерных и кратных функциональных рядов до 1970 года содержится в книге Целлера и Бикмана [49].

Суммированию кратных тригонометрических и ортогональных рядов посвящена обзорная статья Жижиашвили Л.В. [11].

В последнее время в работах Хаустса и Кларнера [43], Одони [47], Дьяковича [38], Янушаускаса А.И. [30], Лейнартаса Е.К. [15, 16], Айзенберга Л.А. и Лейнартаса Е.К. [1] и др. появились различные многомерные обобщения теоремы Адамара об умножении особенностей, в связи с чем возник вопрос об аналогах интегрального представления (0.2) и всей теории разложения по полиномам для пространства $\mathbb{C}^n$.

Заметим, что некоторые результаты монографии [35] для целых функций уже обобщались на двумерный случай в работе Деревянченко Г.Д. и Какичева В.А. [11].

Области сходимости некоторых двойных полиномиальных рядов изучались в работах Янушаускаса А.И. [32] и Беяева В.А. [7].

В работах Цвиль М.М. [25, 26] рассматривалось обобщение полиномов Фабера на случай двух переменных, изучались вопросы сходимости рядов по ним и представления голоморфных функций такими рядами.

В этом же направлении проводятся исследования и в настоящей диссертации.

В диссертации рассматриваются следующие вопросы:

1. Интегральное представление (0.2) (теорема Б) усиливается и обобщается на случай произвольных ядер

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n, \quad \Psi_n \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Psi_n|} = 1.$$

и на случай многих переменных.

2. Для одной и многих переменных изучается аналитическое продолжение степенного ряда при помощи интегрального представления для его суммы, в зависимости от выбора ядра $\Psi(t)$.

3. Теория разложений голоморфных функций по полиномам монографии [35] усиливается и распространяется на кратные полиномиальные ряды.

4. В качестве примера рассматриваются многомерные аналоги полиномов Чебышева, Гегенбауэра, Якоби и др.

Изучаются области сходимости разложений голоморфных функций по названным полиномам.

5. Определяется одно из возможных обобщений классического метода суммирования Миттаг-Леффлера на кратные ряды.

Описываются области суммируемости, введенным методом, разложений голоморфных функций по многомерным полиномам, являющимся обобщением полиномов Чебышева второго рода.

Для получения результатов диссертации используются методы теории функций одного и многих комплексных переменных.

Диссертация состоит из введения и двух глав основного текста, содержащих в совокупности 12 параграфов и списка литературы из 53 наименований.

Объем работы - 90 страниц. Внутри каждой главы соблюдается единая двузначная нумерация параграфов, формул, теорем, лемм и следствий.

§ 0.2. Изложение основных результатов

Приводя результаты диссертации, мы сохраняем нумерацию теорем, лемм, следствий и формул основного текста.

Первая глава диссертации посвящена обобщениям интегральной формулы (0.2) и изучению аналитического продолжения степенных рядов при помощи полученных формул.

В параграфе 1.1 определяется семейство областей $\mathcal{U}(\Lambda)$ и доказывается ряд вспомогательных утверждений, касающихся этого семейства.

Пусть A и B некоторые подмножества расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим

$$z \cdot A = \{z \cdot \omega : \omega \in A\}, \quad A \cdot B = \{z \cdot \omega : z \in A, \omega \in B\},$$

$$A^{-1} = \{z^{-1} : z \in A\}, \quad A' = \overline{\mathbb{C}} \setminus A, \quad A^* = (A')^{-1}.$$

При этом считаем, что $\infty \cdot a = \infty$ при $a \neq 0$, $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1} = 0$, $0 \cdot \infty$ - неопределено.

Далее пусть $I_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ круг радиуса $r > 0$ с центром в начале координат, в частности $I_1 = I$, $I_\infty = \mathbb{C}$.

Если $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, то через $\mathcal{U}(\Lambda)$ обозначим семейство всех возможных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию $\Omega \cdot \Lambda^* \subset \Omega$.

Подмножество семейства $\mathcal{U}(\Lambda)$, состоящее из всех его односвязных областей, обозначим $\mathcal{U}_0(\Lambda)$.

Лемма 1.3. Справедливы утверждения:

- 1) $\mathcal{U}(I) = \mathcal{U}_0(I) = \{I_r, 0 < r \leq \infty\}$;
- 2) если $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, то $\mathcal{U}(\Lambda_1) \subset \mathcal{U}(\Lambda_2)$;
- 3) пусть $(\Lambda')^k = \underbrace{\Lambda' \cdot \Lambda' \cdots \Lambda'}_k$, $\Lambda_1 = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda')^k \right]'$, тогда $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$;
- 4) пусть $\Lambda_1 = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)} \Omega \cdot \Omega^*$, тогда $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$.

Из утверждений 1 и 2 леммы 1.3 следует, что семейства $\mathcal{U}(\Lambda)$ и $\mathcal{U}_0(\Lambda)$ непустые.

Определение. Множество Λ , удовлетворяющее условию $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, назовем минимальным, если для любого множества Λ_1 из соотношений $I \subset \Lambda_1 \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$ следует включение $\Lambda \subset \Lambda_1$.

Лемма 1.4. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, тогда

1) существует единственное минимальное множество Λ_1 такое, что $I \subset \Lambda_1 \subset \Lambda$ и $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$,

2) для того чтобы само множество Λ было минимальным необходимо и достаточно, чтобы $\Lambda \in \mathcal{U}(\Lambda)$ и $1 \in \Lambda'$.

В параграфе 1.2 доказывается теорема являющаяся усилением и обобщением теоремы Б.

Пусть Γ замкнутая, жорданова кривая, разделяющая точки 0 и ∞ и D та из двух ограничиваемых ею областей, которая содержит точку 0 .

Для данного $\Lambda \subset \mathbb{C}$, рассмотрим всевозможные области $S \in \mathcal{U}(\Lambda)$ такие, что $S \subset D$ и обозначим

$$S_\Gamma(\Lambda) = \bigcup_{\substack{S \subset D \\ S \in \mathcal{U}(\Lambda)}} S.$$

Очевидно, если $D \in \mathcal{U}(\Lambda)$, то $S_\Gamma(\Lambda) = D$.

Далее, пусть функция $\Psi(t)$ задана своим степенным рядом

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n. \quad (1.4)$$

При выполнении условия

$$\Psi_n \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.7)$$

можно определить еще одну функцию

$$\Psi_{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_n)^{-1} t^n, \quad (1.8)$$

если ряд (1.8) сходится в окрестности точки нуль.

Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ - область.

Через $G(\Lambda)$ обозначим множество всех тех функций (1.4), удовлетворяющих условию (1.7), которые вместе с соответствующей им функцией (1.8) голоморфно и однозначно продолжаются в область Λ .

Теперь на множестве функций, голоморфных в начале координат, введем следующее преобразование. Каждой функции $f(z)$, заданной своим разложением

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad (1.10)$$

поставим в соответствие функцию

$$g(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Psi_n} \omega^n, \quad (1.11)$$

где $\Psi_n, n = 0, 1, 2, \dots$ — коэффициенты некоторой фиксированной функции (1.4), удовлетворяющие условиям (1.7) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Psi_n|} = 1.$$

Теорема 1.2. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ — область и функция $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. Далее пусть $\Omega \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, $\Gamma \subset \Omega$ спрямляемая, замкнутая, жорданова кривая, разделяющая точки 0 и ∞ .

Тогда для любой функции $f(z)$, заданной рядом (1.10) и голоморфной в области Ω , имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\omega) \cdot \Psi\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (1.12)$$

справедливое для всех $z \in S_{\Gamma}(\Lambda)$. Функция $g(\omega)$ в формуле (1.12) определяется своим разложением в ряд (1.11).

Следствие 1.2. Интегральное представление (1.12) дает аналитическое продолжение суммы ряда (1.10) в любую область семейства $\mathcal{U}_0(\Lambda)$, не пересекающуюся с множеством особых точек этой суммы.

Доказательство теоремы 1.2 проводится при помощи следующей теоремы, дополняющей теорему Адамара об умножении особенностей.

Теорема 1.1. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ — область, в которую голоморфно и однозначно продолжается сумма $\Psi(t)$ степенного ряда

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n. \quad (1.4)$$

Тогда, если область $\Omega \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ и функция $a(z)$, определенная рядом

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (1.5)$$

голоморфно продолжается в область Ω , то и композиция по Адамару рядов (1.4) и (1.5)

$$a * \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n z^n$$

также голоморфно продолжается в область Ω .

В параграфе 1.3 рассматриваются различные примеры, иллюстрирующие теорему 1.2.

В зависимости от выбора ядра $\Psi(t)$ в интегральном представлении (1.12) функция $f(z)$ голоморфно продолжается при помощи формулы (1.12) в те или иные области плоскости $\mathbb{C}$.

В параграфе 1.4 вводятся n -звездные области в пространстве $\mathbb{C}^n$, изучаются их свойства, а также определяется метод суммирования кратных степенных рядов, являющийся обобщением классического метода суммирования Миттаг-Леффлера.

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ точки пространства $\overline{\mathbb{C}}^n$; положим $z \cdot \omega = (z_1 \omega_1, \dots, z_n \omega_n)$, $z^{-1} = (z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})$. Если $A \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $B \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, то обозначим

$$z \cdot A = \{z \cdot \omega : \omega \in A\}, \quad A \cdot B = \{z \cdot \omega : z \in A, \omega \in B\}, \quad A^{-1} = \{z^{-1} : z \in A\};$$

пусть далее $F = [0, 1]$ отрезок действительной оси. Область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ назовем n -звездной, если для нее выполняется соотношение $\Omega \cdot F^n \subset \Omega$.

Очевидно, что любая n -звездная область является звездной с центром в нуле, но не наоборот. Поликруговую область $D = D_1 \times \cdots \times D_n$, являющуюся n -звездной, назовем полизвездой.

Полизвезду назовем максимальной полизвездой, содержащейся в n -звездной области Ω , если любая строго большая ее полизвезда уже не содержится в Ω .

Лемма 1.7. Если Ω — n -звездная область в $\mathbb{C}^n$, то каждая ее точка ζ входит в Ω вместе с некоторой максимальной полизвездой D_ζ , содержащейся в Ω .

Из леммы 1.7 следует, что любая n -звездная область Ω может быть представлена в виде

$$\Omega = \bigcup_{l \in \mathcal{L}} D_l,$$

где $\mathcal{L}$ некоторое множество индексов и все D_l , $l \in \mathcal{L}$ — максимальные полизвезды из Ω . Вообще, если $\mathcal{F} = \{D_l, l \in \mathcal{L}\}$ некоторая система произвольных областей в $\mathbb{C}^n$, то будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ порождается системой $\mathcal{F}$, если

$$\Omega = \bigcup_{l \in M \subset \mathcal{L}} D_l.$$

Множество всевозможных областей Ω , порождаемых системой $\mathcal{F}$, обозначим через $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$.

Рассмотрим кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} f_\alpha z^\alpha, \quad (1.16)$$

сходящийся в некоторой окрестности начала координат. Через M_f обозначим звезду Миттаг-Леффлера функции $f(z)$.

Определим область

$$N_f = \text{int}(\mathbb{C}^n \setminus \Delta_f \cdot \frac{1}{F^n}),$$

где Δ_f множество всех особых точек суммы ряда (1.16).

Область N_f при $n = 2$ встречалась в работах Гурьяновой К.Н. [10] и Мураева Э.Б. [18].

Лемма 1.8. Область N_f является максимальной n - звездной областью в $\mathbb{C}^n$, в которой голоморфна функция $f(z)$.

Область N_f естественно называть n -звездной звездой Миттаг-Леффлера функции $f(z)$.

Следующая теорема показывает, что n -звездная звезда Миттаг-Леффлера является областью суммирования ряда (1.16), если сумму этого ряда определять по формуле

$$S(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{f_\alpha z^\alpha}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} \quad (1.18)$$

Теорема 1.3. Равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{f_\alpha z^\alpha}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} = f(z)$$

справедливо для всех $z \in N_f$. При этом на компактных подмножествах области N_f предел достигается равномерно по z .

В параграфе 1.5 теоремы 1.1 и 1.2 обобщаются на случай многих переменных.

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{C}}^n$, $A \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $|z| = (|z_1|, \dots, |z_n|)$, $|A| = \{|z| : z \in A\}$, $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > 0, j = 1, \dots, n\}$, $|A|_+ = |A| \cap \mathbb{R}_+^n$.

Если $r \in R_+^n$, то через I_r^n обозначим поликруг $I_{r_1} \times \cdots \times I_{r_n}$, в частности, I^n - единичный поликруг $\subset \mathbb{C}^n$.

Пусть теперь $\Lambda = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n$ некоторое множество удовлетворяющее условию $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$.

Через $\mathcal{U}(\Lambda)$ обозначим, как и при $n = 1$, семейство областей $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ для которых $\Omega \cdot \Lambda^* \subset \Omega$, а через $\mathcal{U}_0(\Lambda)$ обозначим подмножество $\mathcal{U}(\Lambda)$, состоящее из поликруговых областей $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ таких, что каждая из плоских областей $\Omega_j, j = 1, \dots, n$ - односвязна.

Аналогично одномерному случаю определим функции

$$\Psi(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \Psi_\alpha t^\alpha, \Psi_\alpha \neq 0$$

и

$$\Psi_{-1}(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} (\Psi_\alpha)^{-1} t^\alpha$$

и каждой, голоморфной в нуле функции (1.16), поставим в соответствие ряд

$$g(\omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{f_\alpha}{\Psi_\alpha} \omega^\alpha.$$

В том случае, когда Λ - поликруговая область и $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$ соотношение $\Psi(t) \in G(\Lambda)$, также как и в одномерном случае, будет означать, что обе функции $\Psi(t)$ и $\Psi_{-1}(t)$ голоморфно и однозначно продолжаются в область Λ .

Теорема 1.4. Пусть область $\Omega \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, Λ - поликруговая область, $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$ и $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. Тогда, для любой функции $f(z)$, заданной рядом (1.16) и голоморфной в области Ω , имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \cdots \int_{\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n} g(\omega) \Psi \left(\frac{z_1}{\omega_1}, \dots, \frac{z_n}{\omega_n} \right) \frac{d\omega_1 \wedge \cdots \wedge d\omega_n}{\omega_1 \dots \omega_n}, \quad (1.19)$$

справедливое для всех $z \in S_\Gamma(\Lambda) \stackrel{def}{=} S_{\Gamma_1}(\Lambda_1) \times \cdots \times S_{\Gamma_n}(\Lambda_n)$.

Здесь каждая кривая Γ_j цикла $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n \subset \Omega$ удовлетворяет тем же условиям, что и в плоском случае.

Во второй главе диссертации результаты первой главы применяются для получения утверждений о разложении голоморфных функций по полиномам, заданным довольно общим производящим соотношением.

В параграфе 2.1 определяются полиномы многих комплексных переменных и изучаются области сходимости рядов по ним.

Обобщая семейство полиномов из монографии [35] на случай многих переменных, приходим к следующему производящему соотношению

$$a(\omega) \cdot \Psi(z \cdot b(\omega)) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha, \quad (2.2)$$

где

$$a(\omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} a_\alpha \omega^\alpha, \quad a_{\underbrace{0 \dots 0}_n} \neq 0,$$

$$z \cdot b(\omega) = (z_1 \cdot b_1(\omega), \dots, z_n \cdot b_n(\omega)), \quad b_j(\omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} b_{\alpha,j} \omega^\alpha,$$

$$\underbrace{b_{0 \dots 0}}_n = 0, \quad \underbrace{b_{0 \dots 0 1}}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Psi(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \Psi_\alpha \cdot t^\alpha, \quad \Psi_\alpha \neq 0 \quad \text{для всех } \alpha.$$

Подобное обобщение многочленов монографии [35] рассматривалось в работах Какичева В.А., Деревянченко Г.Д. [14] и Сторчевой Г.Д. [22].

Мы предполагаем, что в некоторой полной области Рейнхарта $\mathcal{R}$ с центром в нуле отображение $\zeta = b(\omega)$ биголоморфно, а функция $a(\omega)$ голоморфна и $a(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathcal{R}$.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ область, в которую голоморфно и однозначно продолжается функция $\Psi(t)$.

Через D_r обозначим образ поликруга $I_r^n \subseteq \mathcal{R}$, при отображении $\zeta = b(\omega)$ и рассмотрим область $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C}^n : z \cdot \overline{D_r} \subset \Lambda\}$.

В параграфе 2.2 интегральное представление (1.12) применяется к производящему соотношению (2.2) при $n = 1$.

Теорема 2.3. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ область и $\Psi(t) \in G(\Lambda)$.

Если для данного $r \in (0, \rho)$ существует $\varepsilon \in (0, \rho - r)$ такое, что $D_r \in \mathcal{U}(\Lambda)$ для всех $\tau \in [r, r + \varepsilon)$, то любая функция $f(z)$, голоморфная в области Ω_r разлагается в ряд полиномов, заданных соотношением (2.2) при $n = 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z). \quad (2.10)$$

При этом ряд (2.10) сходится к функции $f(z)$ в каждой точке $z \in \Omega_r$ и равномерно сходится на компактных подмножествах области Ω_r .

Отметим, что в [35] рассматривался лишь частный случай $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ этой теоремы, причем при более сильных предположениях относительно функции $\Psi(t)$.

Условия применения теоремы 2.3 к полиномам (2.2) при $n = 1$ состоят из сопряженных требований, предъявляемых к функции $\Psi(t)$ и отображению $\zeta = b(\omega)$.

Пользуясь этой теоремой, можно конструировать новые полиномы удобные для разложения по ним функций, голоморфных в односвязных областях.

В параграфе 2.3 теорема 2.3 обобщается на многомерный случай.

Теорема 2.5. Пусть Λ поликруговая область, $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$, $\Psi(t) \in G(\Lambda)$.

Если $D_r \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ для всех r из некоторого множества $M \subset |\mathcal{R}|_+$, являющегося областью в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\Omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} = \{\Omega_r : r \in M\}$, то любая, голоморфная в области Ω , функция $f(z)$ разлагается в ряд по полиномам (2.2)

$$f(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha p_\alpha(z), \quad (2.17)$$

сходящийся к $f(z)$ в каждой точке $z \in \Omega$ и равномерно сходящийся на компактных подмножествах области Ω .

Полиэллипсом с фокусами a, b ($a \leq 0, b \geq 0$) назовем декартово произведение n эллипсов с фокусами в точках a и b , а области, порождаемые семейством всех возможных полиэллипсов с фокусами a, b мы называем n -эллиптическими областями с фокусами a, b .

Для иллюстрации теоремы 2.5 определяются многомерные аналоги многочленов Гегенбауэра, Якоби и др.

При этом, в соответствующих частных случаях, теорема 2.5 гласит: если функция $f(z)$ голоморфна в некоторой n -эллиптической области с фокусами $-1, 1$, то она разлагается в ряд, сходящийся в этой области, по многомерным полиномам, являющимися аналогами многочленов Гегенбауэра или Якоби.

В параграфе 2.4 определяется функция сравнения многих переменных $\Psi(t)$ и семейство целых функций конечного Ψ -типа.

При

$$\Psi(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^n t_k\right)$$

это семейство совпадает с классом целых функций экспоненциального типа [20].

Устанавливается условие в виде ограничения на Ψ - тип целой функции, при котором она может быть представлена всюду сходящимся в пространстве $\mathbb{C}^n$ рядом по полиномам (2.2).

В параграфе 2.5 рассматривается обобщение многочленов Чебышева второго рода на случай многих переменных и изучается вопрос о суммировании разложений голоморфных функций по этим многочленам методом, введенным в § 1.4 для степенных рядов.

Зададим многочлены $p_\alpha(z)$ с помощью производящей функции

$$A(\omega) \prod_{j=1}^n (1 - 2\omega_j z_j + \omega_j^2)^{-1} = \sum_{|\alpha| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha, \quad (2.32)$$

где функция $A(\omega)$ голоморфна в поликруге I^n и $A(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in I^n$. При $n = 1$ и $A(\omega) \equiv 1$ они превращаются в многочлены Чебышева второго рода.

Гиперболическим лучом на плоскости $\mathbb{C}$ назовем любую часть гиперболы с фокусами $-1, 1$, лежащую в одной четверти плоскости, а также четыре луча:

$$\begin{aligned} &\{x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \geq 0\}, \{x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \leq 0\}, \\ &\{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 1, y = 0\}, \{x + iy \in \mathbb{C} : x \leq -1, y = 0\}. \end{aligned}$$

Пусть $\omega_1 \in \mathbb{C}$; через $T(\omega_1)$ обозначим кусок гиперболического луча, соединяющего точки ω_1 и ∞ .

Для $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$ обозначим $T(\omega) = T(\omega_1) \times \dots \times T(\omega_n)$.

Пусть Δ_f множество особых точек функции $f(z)$, которую предположим голоморфной в некоторой n - эллиптической области с фокусами $-1, 1$.

Область

$$H_f = \text{int}(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\omega \in \Delta_f} T(\omega))$$

назовем гиперболической звездой Миттаг-Леффлера функции $f(z)$.

В качестве суммы Миттаг-Леффлера ряда (2.17) возьмем выражение

$$S(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{c_\alpha p_\alpha(z)}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} \quad (2.34)$$

Теорема 2.8. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой n -эллиптической области с фокусами $-1, 1$, тогда она разлагается в ряд (2.17) по многочленам (2.32), суммируемый методом (2.34) в гиперболической звезде Миттаг-Леффлера H_f , иначе говоря, для всех $z \in H_f$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{c_\alpha p_\alpha(z)}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} = f(z) \quad (2.35)$$

Результаты диссертации докладывались на IX Донецком коллоквиуме по квазиконформным отображениям и обсуждались на семинаре по теории аналитических функций в Московском государственном университете, на семинаре по дифференциальным уравнениям с частными производными в математическом институте АН СССР им. В.А. Стеклова, на семинаре отдела теории функций в институте математики СО АН СССР, а также на семинаре по методам математической физики и обобщенным функциям в Уральском государственном университете.

По теме диссертации автором опубликовано 3 статьи [51-53]

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

§ 1.1. Вспомогательные утверждения

Пусть A и B некоторые подмножества расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим

$$z \cdot A = \{z \cdot w : w \in A\}, \quad A \cdot B = \{z \cdot w : z \in A, w \in B\},$$
$$A^{-1} = \frac{1}{A} = \{z^{-1} : z \in A\}, \quad A' = \overline{\mathbb{C}} \setminus A, \quad A^* = (A')^{-1}.$$

При этом, естественно, предполагаем, что $\infty \cdot a = \infty$ при $a \neq 0$, $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1} = 0$, $0 \cdot \infty$ - неопределено и в дальнейшем не появляется. Далее пусть

$I_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ круг радиуса $r > 0$ с центром в начале координат, в частности полагаем $I_1 = I$, $I_\infty = \mathbb{C}$.

Через $\overline{A}$ будем обозначать замыкание в пространстве $\mathbb{C}$ множества $A \subset \mathbb{C}$.

Если $D \subset \mathbb{C}$ область, то через ∂D обозначается ее граница; условие $\overline{A} \subset D$ записывается $A \Subset D$, если множество A ограничено.

Лемма 1.1. Имеют место равенства:

- 1) $A^* = (A^{-1})'$ для любого множества $A \subset \overline{\mathbb{C}}$;
- 2) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ для множеств $A \Subset \mathbb{C}$ и $B \Subset \mathbb{C}$;

3) $(A' \cdot B')' = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot A^* \subset B\}$, если $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$, $0 \in A \cap B$.

Доказательство.

1. Легко видеть, что

$$A^{-1} \cup (A')^{-1} = (A \cup A')^{-1} = (\overline{\mathbb{C}})^{-1} = \overline{\mathbb{C}}, A^{-1} \cap (A')^{-1} = \emptyset.$$

Поэтому

$$(A^{-1})' = \overline{\mathbb{C}} \setminus A^{-1} = (A')^{-1} = A^*.$$

2. Заметим, что множество $\overline{A} \cdot \overline{B}$ замкнуто в пространстве $\mathbb{C}$. Действительно, если, например, $z_0 \in \mathbb{C}$ его предельная точка, то найдется последовательность точек этого множества $z_n = w_n \cdot t_n$, $w_n \in \overline{A}$, $t_n \in \overline{B}$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к z_0 .

Последовательности w_n и t_n ограничены, т.к. ограничены сами множества $\overline{A}$ и $\overline{B}$, поэтому, переходя к подпоследовательностям, считаем их сходящимися к некоторым точкам $w_0 \in \overline{A}$ и $t_0 \in \overline{B}$ соответственно.

Отсюда $z_0 = w_0 \cdot t_0 \in \overline{A} \cdot \overline{B}$. Таким образом, множество $\overline{A} \cdot \overline{B}$ замкнуто и содержит множество $A \cdot B$, следовательно, $\overline{A \cdot B} \subset \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Обратно, если $z_0 \in \overline{A} \cdot \overline{B}$, то $z_0 = w_0 \cdot t_0$, $w_0 \in \overline{A}$, $t_0 \in \overline{B}$. Тогда существуют последовательности $w_n \in A$ и $t_n \in B$, сходящиеся к w_0 и t_0 соответственно.

Полагая $z_n = w_n \cdot t_n$, $n = 1, 2, \dots$, находим $z_n \in A \cdot B$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, т.е. $z_0 \in \overline{A \cdot B}$. Это означает, что $\overline{A} \cdot \overline{B} \subset \overline{A \cdot B}$.

3. Это утверждение встречается в работах [41, 46].

Имеем

$$(A' \cdot B')' = \{z \in \mathbb{C} : z \notin A' \cdot B'\} = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot A^* \cap B' = \emptyset\} = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot A^* \subset B\}.$$

Лемма 1.1 доказана.

Рассмотрим теперь некоторое множество $\Lambda \subset \mathbb{C}$, содержащее единичный круг I . Через $\mathcal{U}(\Lambda)$ обозначим семейство всех возможных областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\Omega \cdot \Lambda^* \subset \Omega \quad . \quad (1.1)$$

Из этого определения следует, что всякая область Ω семейства $\mathcal{U}(\Lambda)$ содержит точку нуль.

Заметим также, что если множество Λ не содержит точку $z = 1$, т.е. $1 \in \Lambda'$, то условие (1.1) равносильно равенству $\Omega \cdot \Lambda^* = \Omega$.

Подмножество семейства $\mathcal{U}(\Lambda)$, состоящее из всех его односвязных областей, обозначим $\mathcal{U}_0(\Lambda)$.

Лемма 1.2. Условие (1.1) эквивалентно каждому из двух следующих соотношений:

$$1) \quad \Omega' \cdot \Lambda' \subset \Omega', \quad (1.2)$$

$$2) \quad \Omega \cdot \Omega^* \subset \Lambda. \quad (1.3)$$

Доказательство.

Применяя утверждение 3 леммы 1.1, находим:

$$\Omega \cdot \Lambda^* \subset \Omega \iff \Omega \subset \{z \in \mathbb{C} : z \cdot \Lambda^* \subset \Omega\} = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot \Omega^* \subset \Lambda\} = (\Omega' \cdot \Lambda')'.$$

Отсюда следует равносильность всех трех включений (1.1), (1.2) и (1.3).

Лемма 1.2 доказана.

Теперь докажем лемму, в которой приводятся некоторые свойства семейства $\mathcal{U}(\Lambda)$.

Лемма 1.3. Справедливы утверждения:

$$1) \quad \mathcal{U}(I) = \mathcal{U}_0(I) = \{I_r, 0 < r \leq \infty\};$$

- 2) если $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, то $\mathcal{U}(\Lambda_1) \subset \mathcal{U}(\Lambda_2)$;
- 3) пусть $(\Lambda')^k = \underbrace{\Lambda' \cdot \Lambda' \dots \Lambda'}_k$, $\Lambda_1 = [\bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda')^k]'$, тогда $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$;
- 4) пусть $\Lambda_1 = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)} \Omega \cdot \Omega^*$, тогда $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$.

Доказательство.

1. В данном случае $\Lambda = I$, $\Lambda^* = \bar{I}$, поэтому условие (1.1) имеет вид

$$\Omega \cdot \bar{I} \subset \Omega.$$

Таким образом, область Ω тогда и только тогда принадлежит семейству $\mathcal{U}(\Lambda)$, когда она обладает свойством: $z \in \Omega \Rightarrow z \cdot \bar{I} = \bar{I}_{|z|} \subset \Omega$.

Отсюда $\Omega = I_r$ для некоторого r , удовлетворяющего неравенству $0 < r \leq \infty$.

2. По условию $\Lambda'_2 \subset \Lambda'_1$, следовательно, $\Lambda_2^* \subset \Lambda_1^*$, откуда $\Omega \cdot \Lambda_2^* \subset \Omega \cdot \Lambda_1^*$ для любой области Ω .

Сопоставляя это с условием (1.1), находим: $\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda_1) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{U}(\Lambda_2)$, что означает $\mathcal{U}(\Lambda_1) \subset \mathcal{U}(\Lambda_2)$.

3. Прежде всего, очевидно, $\Lambda_1 \subset \Lambda$. Отсюда, по уже доказанному,

$$\mathcal{U}(\Lambda_1) \subset \mathcal{U}(\Lambda).$$

Покажем обратное. Пусть $\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)$, тогда, по лемме 1.2, $\Omega' \cdot \Lambda' \subset \Omega'$.

Теперь для любого натурального $k \geq 2$ имеем: $\Omega' \cdot (\Lambda')^k = \Omega' \cdot \Lambda' (\Lambda')^{k-1} \subset \Omega' (\Lambda')^{k-1} \subset \dots \subset \Omega'$, откуда $\Omega' \cdot \Lambda_1' \subset \Omega'$.

По лемме 1.2 это означает, что $\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda_1)$, т.е. $\mathcal{U}(\Lambda) \subset \mathcal{U}(\Lambda_1)$.

4. Применяя лемму 1.2, имеем $\Lambda_1 \subset \Lambda$, поэтому $\mathcal{U}(\Lambda_1) \subset \mathcal{U}(\Lambda)$.

Обратное, из определения множества Λ_1 , замечаем, что $\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda) \Rightarrow \Omega \cdot \Omega^* \subset \Lambda_1$.

В соответствии с леммой 1.2 последнее означает, что $\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda_1)$, следовательно, $\mathcal{U}(\Lambda) \subset \mathcal{U}(\Lambda_1)$.

Лемма 1.3 доказана.

Из утверждений 1 и 2 леммы 1.3 следует, что семейства $\mathcal{U}(\Lambda)$ и $\mathcal{U}_0(\Lambda)$ непустые. Например, они содержат все круги $J_r, 0 < r \leq \infty$.

Положим теперь $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ в утверждении 3 леммы 1.3, тогда

$$\Lambda' = \{2, \infty\}, (\Lambda')^2 = \{4, \infty\}, \dots, (\Lambda')^k = \{2^k, \infty\}, \dots$$

Поэтому

$$\Lambda_1 = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda')^k \right]' = \mathbb{C} \setminus \{2, \dots, 2^k, \dots\},$$

т.е. $\Lambda_1 \subset \Lambda, \Lambda_1 \neq \Lambda$ и, в то же время, по лемме 1.3, $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$.

Этот пример оправдывает следующее определение.

Определение. Множество Λ , удовлетворяющее условию $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, назовем минимальным, если для любого множества Λ_1 из соотношений $I \subset \Lambda_1 \subset \mathbb{C}, \mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$ следует включение $\Lambda \subset \Lambda_1$.

Лемма 1.4. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, тогда

- 1) существует единственное минимальное множество Λ_1 такое, что $I \subset \Lambda_1 \subset \Lambda$ и $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$,
- 2) для того чтобы само множество Λ было минимальным необходимо и достаточно, чтобы $\Lambda \in \mathcal{U}(\Lambda)$ и $1 \in \Lambda'$.

Доказательство.

1. Для доказательства существования мы используем утверждение 4 леммы 1.3, а именно покажем, что определенное в нем множество Λ_1 является искомым минимальным множеством.

Действительно, взяв в качестве Ω некоторый круг $I_r, 0 < r < \infty$, убеждаемся, что $I \subset \Lambda_1$.

Далее, применяя лемму 1.2, находим, что $\Lambda_1 \subset \Lambda$.

Любое же множество Λ_2 такое, что $I \subset \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$ и $\mathcal{U}(\Lambda_2) = \mathcal{U}(\Lambda_1) = \mathcal{U}(\Lambda)$ содержит все множества $\Omega \cdot \Omega^*, \Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)$, т.е. содержит Λ_1 .

Поэтому множество Λ_1 минимально. Его единственность следует из самого определения минимального множества.

2. Необходимость.

Пусть Λ минимально, тогда, по уже доказанному,

$$\Lambda = \Lambda_1 = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)} \Omega \cdot \Omega^*.$$

Теперь, если $1 \in \Lambda$, то найдется область $\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)$ такая, что $1 \in \Omega \cdot \Omega^*$, т.е. $1 = z \cdot \omega^{-1}$ при некоторых $z \in \Omega$ и $\omega \in \Omega'$. Противоречие.

Итак $1 \in \Lambda'$. Далее, пусть $\Omega \neq \mathbb{C}$, тогда $\Omega \cdot \Omega^* = \bigcup_{t \in \Omega^* \setminus \{0\}} \Omega \cdot t$, откуда следует, что $\Omega \cdot \Omega^*$ область, если $\Omega \neq \mathbb{C}$.

Но тогда и само множество Λ является областью.

Наконец,

$$\Lambda \cdot \Lambda^* = \left(\bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)} \Omega \cdot \Omega^* \right) \Lambda^* = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)} \Omega \cdot (\Omega^* \Lambda^*) = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)} \Omega \cdot \Omega^* = \Lambda,$$

таким образом, $\Lambda \in \mathcal{U}(\Lambda)$.

Достаточность.

Пусть $1 \in \Lambda'$ и $\Lambda \in \mathcal{U}(\Lambda)$, тогда, по уже доказанному утверждению 1 настоящей леммы, существует минимальное множество

$$\Lambda_1 = \bigcup_{\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)} \Omega \cdot \Omega^* \subset \Lambda,$$

для которого $\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda_1)$.

Так как $\Lambda \in \mathcal{U}(\Lambda)$, то при $\Omega = \Lambda$ находим $\Lambda = \Lambda \cdot \Lambda^* \subset \Lambda_1$. Отсюда $\Lambda_1 = \Lambda$.

Лемма 1.4 доказана.

Сделаем теперь некоторые замечания.

1. Из леммы 1.4 следует, что минимальными множествами могут быть только области.

2. Условие $\Lambda \in \mathcal{U}(\Lambda)$ равносильно следующим: $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ - область и $\Lambda' \cdot \Lambda' \subset \Lambda'$. Если же $1 \in \Lambda'$, то последнее включение превращается в равенство $\Lambda' \cdot \Lambda' = \Lambda'$.

3. Приведенный выше пример $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{2\}$ показывает, что множество Λ_1 , определенное в утверждении 3 леммы 1.3, вообще говоря, не является минимальным.

Однако нетрудно доказать, что оно будет минимальным в том случае, когда $1 \in \Lambda'$ и, в силу единственности минимального множества, совпадает с множеством Λ_1 из утверждения 4 леммы 1.3.

4. Заметим, что конструкции вида $\Omega \cdot \Omega^*$ использовались в работе [3] для описания областей эффективной суммируемости степенных рядов.

Лемма 1.5. Пусть $\Lambda \in \mathcal{U}(\Lambda)$, $\Lambda \neq \mathbb{C}$ и $D \subset \mathbb{C}$ некоторая область, содержащая точку нуль. Тогда множество $S = D \cdot \Lambda^*$ также является областью, причем $S \in \mathcal{U}(\Lambda)$.

Доказательство.

Тот факт, что S - область доказывается так же, как это было сделано в лемме 1.4 для множества $\Omega \cdot \Omega^*$.

Далее $S \cdot \Lambda^* = D\Lambda^* \cdot \Lambda^* \subset D \cdot \Lambda^* = S$. Значит $S \in \mathcal{U}(\Lambda)$.

Лемма 1.5 доказана.

§ 1.2. Интегральное представление для суммы степенного ряда

Прежде всего докажем следующую теорему, которая описывает голоморфное продолжение композиции по Адамару двух степенных рядов.

Теорема 1.1. Пусть

$$I \subset \Lambda \subset \mathbb{C},$$

Λ - область, в которую голоморфно и однозначно продолжается сумма $\Psi(t)$ степенного ряда

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n \quad (1.4)$$

Тогда, если область $\Omega \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ и функция $a(z)$, определенная рядом

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.5)$$

голоморфно продолжается в область Ω , то и композиция по Адамару рядов (1.4) и (1.5)

$$a * \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n z^n$$

также голоморфно продолжается в область Ω .

Доказательство.

Мы действуем аналогично доказательству теоремы Адамара об умножении особенностей [8].

Сначала заметим, что вследствие утверждения 1 леммы 1.4 область Λ можно считать минимальным множеством.

Пусть ω произвольная точка области Ω . Возьмем ограниченную область $B \Subset \Omega$, содержащую точки 0 и ω .

По лемме 1.5 множество $S = B \cdot \Lambda^*$ является областью и $S \in \mathcal{U}(\Lambda)$.

Кроме того $1 \in \Lambda'$ (условие минимальности Λ), поэтому $B \subset S$ и $\omega \in S$.

Используя утверждение 2 леммы 1.1, находим

$$\overline{S} = \overline{B} \cdot \overline{\Lambda^*} = \overline{B} \cdot \Lambda^* \subset \Omega \cdot \Lambda^* = \Omega,$$

следовательно $S \Subset \Omega$. В силу односвязности области Ω , найдется такая односвязная область D с жордановой спрямляемой (даже кусочно-

гладкой) границей Γ , что $S \Subset \mathcal{D} \Subset \Omega$ (см. [28], стр. 127).

Мы докажем справедливость интегрального представления

$$a * \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} a(\zeta) \Psi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (1.6)$$

для любой точки z из области S .

Когда $z \in S$ и $\zeta \in \Gamma$ имеем $\zeta \in \Omega$ и $z \cdot \zeta^{-1} \in S \cdot S^* \subset \Lambda$ (по лемме 1.2).

Поэтому функция $b(z)$, определенная интегралом (1.6)

$$b(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} a(\zeta) \Psi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

голоморфна и однозначна в области S .

Так как $0 \in S$, то найдется $\rho > 0$ такое, что круг $I_\rho \subset S$. Очевидно, ряд (1.5) сходится в I_ρ .

Пусть теперь $z \in I_\rho$. Выберем $r > 0$ так, что $|z| < r < \rho$.

Область Ω односвязна, поэтому кривая Γ гомотопна в этой области окружности $\partial I_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Если $\zeta \in \partial I_r$, то $\zeta \in I_\rho$ и $z \cdot \zeta^{-1} \in I$ при выбранном z .

По интегральной теореме Коши, имеем

$$\begin{aligned} b(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial I_r} a(\zeta) \Psi\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial I_r} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n \Psi_m z^m \zeta^{n-m-1} d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Psi_n z^n = a * \Psi(z), z \in I_\rho, \end{aligned}$$

Почленное интегрирование законно, т.к. ряды для функций $a(\zeta)$ и $\Psi(\frac{z}{\zeta})$ сходятся равномерно по $\zeta \in \partial I_r$.

По теореме единственности, теперь $b(z) = a * \Psi(z)$ в области S . Формула (1.6) доказана. Учитывая, что ω произвольная точка области Ω , мы тем

самым доказали возможность аналитического продолжения композиции по Адамару рядов (1.4) и (1.5) в область Ω .

По теореме о монодромии, определенная таким образом функция $a*\Psi(z)$, однозначна в Ω .

Теорема 1.1 доказана.

Вопрос об аналитическом продолжении композиции по Адамару исследован очень мало [8].

Теорема 1.1 дает определенную информацию по этому вопросу при дополнительных ограничениях на один из рядов и, таким образом, дополняет теорему Адамара об умножении особенностей.

Отметим еще работу [17], в которой затрагивается эта проблема.

Пусть теперь Γ любая замкнутая жорданова кривая, разделяющая точки 0 и ∞ и D та из двух ограничиваемых ей областей, которая содержит точку 0 .

Для данного множества Λ , $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$ рассмотрим всевозможные области $S \in \mathcal{U}(\Lambda)$ такие, что $S \subset D$.

Наибольшую из всех этих областей, равную их объединению, мы обозначим через $S_\Gamma(\Lambda)$. Если $D \in \mathcal{U}(\Lambda)$, то, очевидно, $S_\Gamma(\Lambda) = D$.

Следствие 1.1. В условиях теоремы 1.1 интегральное представление (1.6) при фиксированной замкнутой, спрямляемой, жордановой кривой Γ справедливо для всех $z \in S_\Gamma(\Lambda)$.

Доказательство.

Пусть кривая Γ фиксирована и ω - любая точка области $S_\Gamma(\Lambda)$.

По определению области $S_\Gamma(\Lambda)$ найдется такая область $S_1 \in \mathcal{U}(\Lambda)$, что $\omega \in S_1 \subset D$.

Возьмем ограниченную область $B \Subset S_1$, содержащую точки 0 и ω , и сконструируем область $S = B \cdot \Lambda^*$.

Тогда $S \Subset S_1$, $S \in \mathcal{U}(\Lambda)$, $\omega \in S$.

Рассуждая далее как в доказательстве теоремы 1.1, доказываем интегральное представление (1.6) для всех $z \in S$, а следовательно и для любой точки $\omega \in S_n(\Lambda)$.

Следствие 1.1 доказано.

В качестве ядра будущего интегрального представления для суммы степенного ряда рассмотрим функцию $\Psi(t)$, заданную сходящимся рядом (1.4).

Предположим, что

$$\Psi_n \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

и вместе с рядом (1.4) в окрестности начала координат сходится ряд

$$\Psi_{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi_n)^{-1} t^n. \quad (1.8)$$

Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ - некоторая область.

Через $G(\Lambda)$ обозначим множество всех тех функций (1.4), удовлетворяющих условию (1.7), которые вместе с соответствующей им функцией (1.8) голоморфно и однозначно продолжаются в область Λ .

Из теоремы 1.1 следует, что в случае $\Lambda \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ множество $G(\Lambda)$ относительно операции $*$ является коммутативной группой с единицей $(1-t)^{-1}$.

Для того, чтобы функция (1.4) принадлежала множеству $G(I)$ достаточно выполнения двух условий: (1.7) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Psi_n|} = 1. \quad (1.9)$$

Если же $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, то важным представителем множества $G(\Lambda)$ является гипергеометрическая функция

$${}_2F_1(a, b, c; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} t^n,$$

где параметры a , b и c не равны нулю или целому отрицательному числу,

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), (a)_0 = 1.$$

Действительно, известно [4], что гипергеометрическая функция ${}_2F_1$ голоморфно продолжается в область $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.

Поэтому функции

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} t^n \quad \text{и} \quad \Psi_{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{(a)_n} t^n$$

также голоморфно продолжаются в область Λ , как частные случаи гипергеометрической функции.

Таким образом, $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. По той же причине группе $G(\Lambda)$ принадлежит и функция

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} t^n$$

.

Но тогда, по теореме 1.1 (или по теореме Адамара об умножении особенностей), и сама функция ${}_2F_1(a, b, c; t)$ принадлежит группе $G(\Lambda)$.

Отметим, что вопросы аналитического продолжения функции (1.8) при действительных коэффициентах Ψ_n и условии (1.9) рассматривал Сул [48, 49], а в общем случае комплексных коэффициентов Ψ_n , при дополнительном предположении, что функция (1.4) голоморфна в области $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ - Эгмон [34].

Теперь на множестве функций, голоморфных в начале координат, введем следующее преобразование. Каждой функции $f(z)$, заданной своим разложением в ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \tag{1.10}$$

поставим в соответствие функцию

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Psi_n} z^n, \tag{1.11}$$

где $\Psi_n, n = 0, 1, \dots$ коэффициенты некоторой фиксированной функции (1.4), удовлетворяющие условиям (1.7) и (1.9).

Теорема 1.2. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ - область и функция $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. Далее пусть $\Omega \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, $\Gamma \subset \Omega$ спрямляемая, замкнутая, жорданова кривая, разделяющая точки 0 и ∞ .

Тогда для любой функции $f(z)$, заданной рядом (1.10) и голоморфной в области Ω , имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(\omega) \Psi\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (1.12)$$

справедливое для всех $z \in S_{\Gamma}(\Lambda)$. Функция $g(\omega)$ в формуле (1.12) определяется своим разложением в ряд (1.11).

Доказательство.

Так как $g(\omega) = f * \Psi_{-1}(\omega)$ то, по теореме 1.1, функция $g(\omega)$ голоморфно продолжается в область Ω .

Кроме того, $f(z) = g * \Psi(z)$, поэтому, по следствию 1.1, для функции $f(z)$ мы имеем интегральное представление (1.12).

Теорема 1.2 доказана.

Следствие 1.2. Интегральное представление (1.12) дает аналитическое продолжение суммы ряда (1.10) в любую область семейства $\mathcal{U}_0(\Lambda)$, не пересекающуюся с множеством особых точек этой суммы.

Для функции $g(\omega)$ мы также можем указать интегральное представление

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \Psi_{-1}\left(\frac{\omega}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (1.13)$$

которое продолжает ее голоморфно в область Ω .

Здесь кривая $C \subset \Omega$ обладает теми же свойствами, что и Γ в формуле (1.12), $\omega \in S_C(\Lambda)$.

Пусть $z \in S_\Gamma(\Lambda)$, Γ вместе со своей внутренностью D содержится в области $S_C(\Lambda)$, тогда, подставляя найденное выражение для $g(\omega)$ в формулу (1.12), получаем

$$f(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma C} f(\zeta) \Psi\left(\frac{z}{\omega}\right) \cdot \Psi_{-1}\left(\frac{\omega}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} \cdot \frac{d\omega}{\omega}. \quad (1.14)$$

Заметим, что формула (1.14) сводится к интегральной формуле Коши. В этом можно убедиться меняя порядок интегрирования (что при указанных условиях допустимо) и используя равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Psi\left(\frac{z}{\omega}\right) \cdot \Psi_{-1}\left(\frac{\omega}{\zeta}\right) \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}. \quad (1.15)$$

Формула (1.15) может быть доказана тем же методом каким была доказана формула (1.6) в теореме 1.1.

Мы можем рассматривать формулу (1.13) как интегральное преобразование функции $f(z)$.

Тогда формула (1.12) является его формулой обращения.

Ее доказательство можно было бы получить рассуждая в обратном порядке: установить равенство (1.15), подставить его в интегральную формулу Коши и, изменив порядок интегрирования, прийти к формуле (1.14), наконец воспользоваться преобразованием (1.13).

§ 1.3. Примеры

В этом параграфе мы приведем некоторые примеры, иллюстрирующие материал предыдущих параграфов.

Пример 1.

Пусть $\Lambda = I$. Поскольку $1 \in \Lambda'$ и $\Lambda' \cdot \Lambda' = \Lambda'$, то, по лемме 1.4, Λ - минимальное множество.

В качестве ядра интегрального представления (1.12) здесь, очевидно, можно брать любую сумму ряда (1.4), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (1.7) и (1.9).

Однако, согласно утверждению 1 леммы 1.3, семейство областей $\mathcal{U}(\Lambda)$ состоит в этом случае из одних кругов I_r , следовательно никакого продолжения ряда (1.10) за пределы его круга сходимости формула (1.12) не дает.

Пример 2.

Возьмем теперь область Λ , для которой

$$\Lambda' = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z - 1)| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\}$$

есть множество точек расположенных внутри и на границах угла величины 2α с вершиной в точке 1 и биссектрисой $\operatorname{Im} z = 0$.

В данном случае семейство $\mathcal{U}(\Lambda)$ состоит из областей Ω , удовлетворяющих условию $\Omega' \cdot \Lambda' = \Omega'$, которое, очевидно, равносильно следующему: $\omega \cdot \Lambda' \subset \Omega'$ для всех $\omega \in \partial\Omega$.

Таким образом, семейство $\mathcal{U}(\Lambda)$ здесь состоит из областей Ω , содержащих точку нуль и непересекающихся со всеми углами $\omega\Lambda'$, $\omega \in \partial\Omega$.

Заметим, однако, что Λ не является минимальным множеством. Лемма 1.4 гарантирует нам существование минимального множества $\Lambda_\alpha \subset \Lambda$ такого, что $\mathcal{U}(\Lambda_\alpha) = \mathcal{U}(\Lambda)$.

Так как $1 \in \Lambda'$, то это множество можно сконструировать в виде

$$\Lambda_\alpha = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (\Lambda')^k \right]'$$

(см. замечание 3 после леммы 1.4).

Построив соответствующий чертеж, нетрудно убедиться, что

$$\Lambda' = \left\{ z = \rho(\varphi)e^{i\varphi} : \rho(\varphi) \geq \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - |\varphi|)}, |\varphi| \leq \alpha \right\}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} (\Lambda')^2 &= \left\{ z = \rho(\varphi) \cdot e^{i\varphi} : \rho(\varphi) \geq \min_{\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{\sin(\alpha - |\varphi_1|) \sin(\alpha - |\varphi_2|)} \right], |\varphi_1| \leq \alpha, |\varphi_2| \leq \alpha \right\} = \\ &= \left\{ z = \rho(\varphi) \cdot e^{i\varphi} : \rho(\varphi) \geq \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha - \frac{|\varphi|}{2})}, |\varphi| \leq 2\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Действуя аналогично, определяем $(\Lambda')^k$ при $k > 2$

$$(\Lambda')^k = \left\{ z = \rho(\varphi) \cdot e^{i\varphi} : \rho(\varphi) \geq \frac{\sin^k \alpha}{\sin^k(\alpha - \frac{|\varphi|}{k})}, |\varphi| \leq \min[k\alpha, \pi] \right\}.$$

В пределе при $k \rightarrow \infty$ получаем

$$\Lambda'_\alpha = \{ z = \rho(\varphi) \cdot e^{i\varphi} : \rho(\varphi) \geq e^{|\varphi| \operatorname{ctg} \alpha}, |\varphi| \leq \pi \}.$$

Заметим, что $\rho(\varphi) = e^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha}$ — уравнение в полярных координатах логарифмической α -спирали, пересекающей под углом α любой луч, проведенный из начала координат.

Поэтому Λ_α представляет собой симметричную относительно оси OX область, ограничиваемую частями двух логарифмических спиралей

$$\rho(\varphi) = e^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{и} \quad \rho(\varphi) = e^{-\varphi \operatorname{ctg} \alpha}, \quad -\pi \leq \varphi \leq 0.$$

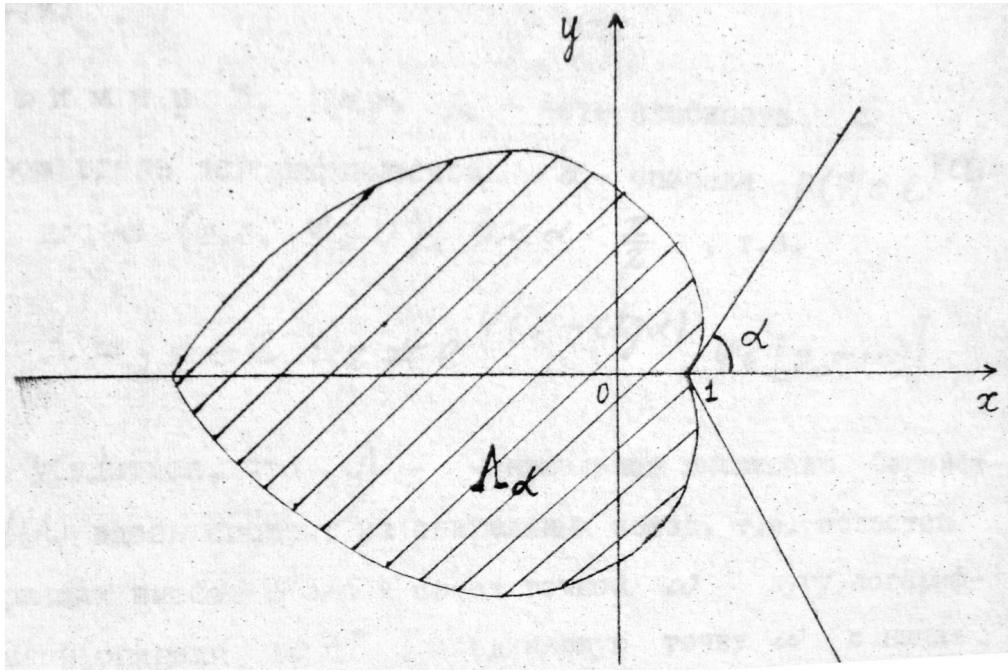


Рис. 1.

Теперь мы сможем точнее описать процесс аналитического продолжения ряда (1.10), осуществляемого формулой (1.12) в случае, когда функция $\Psi(t) \in G(\Lambda_\alpha)$.

Построим спиральные углы $\omega \cdot \Lambda'_\alpha$ с вершиной в каждой особой точке ω суммы ряда (1.10), возьмем объединение $\bigcup_\omega \omega \Lambda'_\alpha$ по всем особым точкам

функции $f(z)$ и рассмотрим дополнение $\left[\bigcup_\omega \omega \Lambda'_\alpha \right]'$. Открытое ядро этого дополнения

$$\Omega_\alpha = \text{int} \left[\bigcup_\omega \omega \Lambda'_\alpha \right]'$$

и будет той областью, в которую формула (1.12) голоморфно продолжает сумму ряда (1.10).

Можно проверить, что $\Omega_\alpha \in \mathcal{U}(\Lambda_\alpha)$.

В частном случае при $\alpha = 0$ мы получаем голоморфное продолжение в звезду Миттаг-Леффлера функции $f(z)$.

Пример 3.

Пусть Λ есть плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль логарифмической α -спирали $\rho(\varphi) = e^{\varphi \operatorname{ctg}(\alpha)}$ от 1 до ∞ (т.е. $\varphi \geq 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, т.е.

$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : z \neq e^{\varphi(i + \operatorname{ctg}(\alpha))}, \varphi \in [0, +\infty]\}.$$

Легко убедиться, что Λ минимальное множество.

Семейство $\mathcal{U}(\Lambda)$ здесь состоит из спиральных звезд, т.е. областей содержащих вместе с любой своей точкой ω , дугу логарифмической спирали $\omega \Lambda^*$, соединяющую точку ω с началом координат (см. также [3]).

Таким образом, при условии $\Psi(t) \in G(\Lambda)$ формула (1.12) дает аналитическое продолжение суммы ряда (1.10) в максимальную спиральную звезду, не содержащую особых точек этой суммы, так сказать, в спиральную звезду Миттаг-Леффлера.

Пример 4.

Возьмем $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел.

Тогда,

$$\Lambda' = \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \Lambda' \cdot \Lambda' = \Lambda',$$

следовательно, Λ - минимально.

Здесь области семейства $\mathcal{U}(\Lambda)$ это области Ω , удовлетворяющие условию

$$\Omega \cdot \frac{1}{n} \subset \Omega, \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Аналитическое продолжение, осуществляемое формулой (1.12) можно описать так: пусть Δ_f - множество особых точек суммы ряда (1.10), тогда, при условии, что $\Psi(t) \in G(\Lambda)$ формула (1.12) аналитически продолжает функцию $f(z)$ в любую односвязную область Ω такую, что

$$0 \in \Omega \text{ и } \Omega \subset \mathbb{C} \setminus (\Delta_f \cdot \mathbb{N}).$$

Пример 5.

Обозначим через E множество корней степени n из единицы, т.е.

$$E = \left\{ \exp\left(\frac{2k\pi}{n}i\right), k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

и пусть $\Lambda = \mathbb{C} \setminus E$. Тогда $\Lambda' = E \cup \{\infty\}$ и легко видеть, что Λ - минимальное множество.

Условие (1.1) в данном случае означает, что область Ω переходит в себя при поворотах на угол $\frac{2\pi}{n}$.

Таким образом, здесь формула (1.12) дает голоморфное продолжение ряда (1.10) в любую односвязную область Ω , инвариантную относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$, при условии $\Psi(t) \in G(\Lambda)$.

В частности, при $n = 1$ получаем аналитическое продолжение суммы ряда (1.10) в любую односвязную область, содержащую точку нуль и не пересекающуюся с множеством особых точек этой суммы.

§ 1.4. n - звездные области в $\mathbb{C}^n$

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ точки пространства $\overline{\mathbb{C}}^n$; положим $z\omega = (z_1\omega_1, \dots, z_n\omega_n)$, $z^{-1} = (z_1^{-1}, \dots, z_n^{-1})$.

При этом считаем действующими соглашения принятые в начале параграфа 1.1. Если $A \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $B \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, то обозначим

$$zA = \{z\omega : \omega \in A\}, A \cdot B = \{z\omega : z \in A, \omega \in B\}, A^{-1} = \{z^{-1} : z \in A\}.$$

Также как и в одномерном случае используем обозначение $\overline{A}$ для замыкания в $\mathbb{C}^n$ множества $A \subset \mathbb{C}^n$, ∂D для границы области $D \subset \mathbb{C}^n$, записываем $A \Subset D$ в том случае когда $\overline{A} \subset D$ и A ограничено.

Без труда на случай многих переменных переносится утверждение 2 леммы 1.1.

Лемма 1.6. Пусть $A \Subset \mathbb{C}^n$, $B \Subset \mathbb{C}^n$, тогда $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Доказательство практически дословно совпадает с уже разобранным случаем $n = 1$.

Пусть далее $F = [0, 1]$ отрезок действительной оси и $E \subset F^n$.

Область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ назовем E -звездной, если для нее выполняется соотношение $\Omega \cdot E \subset \Omega$.

Например, если

$$E = E_d = \{z \in F^n : z_1 = z_2 = \dots = z_n\}$$

- диагональ куба F^n , то E -звездная область Ω есть просто звездная область в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле в обычном общепринятом смысле.

В случае $E = F^n$ будем называть E -звездные области n -звездными.

Очевидно, что любая n -звездная область является звездной с центром в нуле, но не наоборот.

Например, область $\mathbb{C}^n \setminus E_d^{-1}$ является звездной с центром в начале координат, но не n -звездной, ибо $(\mathbb{C}^n \setminus E_d^{-1})F^n = \mathbb{C}^n$.

Ясно также, что область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ тогда и только тогда n -звездна, когда она вместе с каждой своей точкой $z = (z_1, \dots, z_n)$ содержит декартово произведение отрезков

$$z \cdot F^n = z_1 F \times \dots \times z_n F.$$

Поликруговую область $D = D_1 \times \dots \times D_n$, являющуюся n -звездной, назовем полизвездой.

В этом случае $D_k \subset \mathbb{C}, k = 1, \dots, n$ плоские, звездные с центром в нуле, области.

Полизвезду D назовем максимальной полизвездой содержащейся в n -звездной области Ω , если $D \subset \Omega$ и не существует полизвезды $D_1 \neq D$ такой, что $D \subset D_1 \subset \Omega$.

Лемма 1.7. Если Ω - n -звездная область в $\mathbb{C}^n$, то каждая ее точка ζ входит в Ω вместе с некоторой максимальной полизвездой D_ζ , содержащейся в Ω .

Доказательство.

Пусть $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \Omega$. Рассмотрим 2^n точек $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, где $\omega_k \in \{0, \zeta_k\}$, $k = 1, \dots, n$; некоторые из них могут совпадать.

Все эти точки лежат в области Ω и, следовательно, их достаточно малые полициркуговые окрестности

$$V_\omega = V_{\omega_1} \times \dots \times V_{\omega_n} = \{|z_k - \omega_k| < \varepsilon_\omega, k = 1, \dots, n\}$$

также лежат в Ω . Пусть ε наименьшее из всех ε_ω .

Рассмотрим теперь два полициркула

$$V_\zeta = V_{\zeta_1} \times \dots \times V_{\zeta_n}, \quad V_{\zeta_k} = \{|z_k - \zeta_k| < \varepsilon\} \text{ и } V_0 = V_1 \times \dots \times V_n, \quad V_k = \{|z_k| < \varepsilon\}, \\ k = 1, \dots, n.$$

Легко проверить, что полизвезда $B_\zeta = (V_\zeta \cdot F^n) \cup V_0$ лежит в Ω и содержит точку ζ .

Осталось доказать, что существует максимальная в Ω полизвезда

$$\mathcal{D}_\zeta \supset B_\zeta.$$

Рассмотрим множество X всевозможных полизвезд D таких, что

$$B_\zeta \subset D \subset \Omega.$$

Тогда X частично упорядочено по включению, а любое линейно упорядоченное подмножество Y из X имеет в X верхнюю грань (такой гранью будет, например, объединение всех элементов Y).

По лемме Цорна существует максимальный элемент D_ζ в X , который и является искомой полизвездой, максимальной в Ω и содержащей B_ζ .

Лемма 1.7 доказана.

Из леммы 1.7 следует, что любая n -звездная область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ может быть представлена в виде

$$\Omega = \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}} \mathcal{D}_\ell,$$

где $\mathcal{L}$ - некоторое множество индексов и все $D_\ell, \ell \in \mathcal{L}$ - максимальные полизвезды из Ω . Такое представление, вообще говоря, не единственно.

Пусть вообще $\mathcal{F} = \{D_\ell, \ell \in \mathcal{L}\}$ некоторая система произвольных областей в $\mathbb{C}^n$.

Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ порождается системой $\mathcal{F}$, если

$$\Omega = \bigcup_{\ell \in M \subset \mathcal{L}} D_\ell.$$

Множество всех возможных областей Ω , порождаемых системой $\mathcal{F}$, обозначим через $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$.

Например, если $\mathcal{F}$ система всевозможных поликругов в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле, то $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ множество полных областей Рейнхардта или n -круговых областей.

Пусть a и b действительные числа, причем $a \leq 0$, а $b \geq 0$.

Полиэллипсом с фокусами a, b назовем декартово произведение n эллипсов с фокусами в точках a и b .

n -звездные области, которые порождает система всех возможных полиэллипсов с фокусами a, b будем называть n -эллиптическими областями с фокусами a, b .

Пусть далее, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ мультииндекс,

$$\alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}.$$

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} f_\alpha z^\alpha, \quad (1.16)$$

сходящийся в некоторой окрестности начала координат.

Через M_f обозначим звезду Миттаг-Леффлера функции $f(z)$, т.е. максимальную, звездную с центром в нуле, область пространства $\mathbb{C}^n$, в которую голоморфно продолжается сумма ряда (1.17).

Тогда всюду в M_f имеет место равенство (см. [31])

$$f(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{f_\alpha z^\alpha}{\Gamma(|\alpha| \lambda + 1)}, \quad (1.17)$$

где $\lambda > 0$, а $\Gamma(t)$ - гамма-функция Эйлера.

Выберем теперь в качестве суммы Миттаг-Леффлера ряда (1.16) другое выражение

$$S(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{f_\alpha z^\alpha}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} \quad (1.18)$$

и определим его область суммируемости этим методом.

Пусть Δ_f множество всех особых точек суммы ряда (1.16); через N_f обозначим внутренность дополнения в $\mathbb{C}^n$ до множества $\Delta_f \cdot \frac{1}{F^n}$, т.е.

$$N_f = \text{int} \left(\mathbb{C}^n \setminus \Delta_f \cdot \frac{1}{F^n} \right).$$

Область N_f при $n = 2$ встречалась в работах Гурьяновой К.Н. [10] и Мураева Э.Б. [18].

Она сконструирована аналогично, введенной Ивановым В.К. [13], звезде Бореля - области суммируемости методом Бореля двойного степенного ряда.

Может показаться, что область N_f совпадает с звездой Миттаг-Леффлера M_f функции $f(z)$, однако это не так. Докажем, что $N_f \subset M_f$ и, вообще говоря, $N_f \neq M_f$.

Лемма 1.8. Область N_f является максимальной n - звездной областью в $\mathbb{C}^n$, в которой голоморфна функция $f(z)$.

Доказательство.

Из определения области N_f легко следует, что

$$(\mathbb{C}^n \setminus N_f)^{-1} = \overline{\Delta_f^{-1} \cdot F^n}.$$

Обозначим $\Delta_f^{-1} = A_f$, тогда, применяя лемму 1.6, находим

$$N_f = \mathbb{C}^n \setminus (\bar{A}_f \cdot F^n)^{-1}.$$

Теперь, если $z \in N_f$, то $z \notin (\bar{A}_f \cdot F^n)^{-1}$, откуда $z \cdot F^n \cap (\bar{A}_f \cdot F^n)^{-1} = \emptyset$, ибо иначе $z \in (\bar{A}_f \cdot F^n)^{-1} \cdot (F^n)^{-1} = (\bar{A}_f \cdot F^n \cdot F^n)^{-1} = \mathbb{C}^n \setminus N_f$.

Таким образом, $z \cdot F^n \subset \mathbb{C}^n \setminus (\bar{A}_f \cdot F^n)^{-1} = N_f$.

Последнее соотношение выполняется для любой точки $z \in N_f$, следовательно, $N_f \cdot F^n \subset N_f$.

Мы показали, что область N_f является n -звездной.

Чтобы доказать, что она максимальная из всех n -звездных областей, в которые голоморфно продолжается функция $f(z)$, предположим противное, т.е., что существует такая n -звездная область D , в которой функция $f(z)$ голоморфна и $D \setminus N_f \neq \emptyset$.

Пусть $\omega \in D \setminus N_f$, тогда $\omega \in (\bar{A}_f \cdot F^n)^{-1}$, откуда $\omega F^n \cap (\bar{A}_f)^{-1} \neq \emptyset$.

Поскольку $\omega \cdot F^n \subset D$, то $D \cap (\bar{A}_f)^{-1} \neq \emptyset$.

Теперь нетрудно убедиться, что $D \cap (A_f)^{-1} = \emptyset$, ибо D область.

Но $(A_f)^{-1} = \Delta_f$, следовательно, $D \cap \Delta_f \neq \emptyset$. Противоречие.

Лемма 1.8 доказана.

Теперь мы видим, что N_f естественно называть n -звездной звездой Миттаг-Леффлера функции $f(z)$.

Следующая теорема показывает, что n -звездная звезда Миттаг-Леффлера N_f является областью суммирования ряда (1.16) при выбранном нами способе суммирования (1.18).

Теорема 1.3. Равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{f_\alpha z^\alpha}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} = f(z)$$

справедливо для всех $z \in N_f$. При этом на компактных подмножествах

области N_f предел достигается равномерно по z .

Доказательство.

Если N_f полизвезда, то доказательство проводится с использованием интегральной формулы Коши в $\mathbb{C}^n$ аналогично одномерному случаю в [24].

В общем случае, по лемме 1.7, N_f представляет собой объединение полизвезд, поэтому доказательство здесь сводится к рассмотренному частному случаю.

Теорема 1.3 доказана.

§ 1.5. Аналитическое продолжение кратных степенных рядов

В этом параграфе речь пойдет об обобщении интегрального представления (1.12).

Прежде всего оно легко обобщается на случай многих переменных в духе интегральной формулы Коши в $\mathbb{C}^n$.

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ точки пространства $\overline{\mathbb{C}}^n$, $A \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$.

К обозначениям параграфа 1.4 добавим следующие:

$$z\lambda = (z_1\lambda, \dots, z_n\lambda), |z| = (|z_1|, \dots, |z_n|), A \cdot \lambda = \{z\lambda : z \in A\},$$

$$A \cdot B = \{z\lambda : z \in A, \lambda \in B\}, |A| = \{|z| : z \in A\}, \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > 0, j = 1, \dots, n\}, |A|_+ = |A| \cap \mathbb{R}_+^n.$$

Если $r \in \mathbb{R}_+^n$, то через I_r^n обозначим поликруг $I_{r_1} \times \dots \times I_{r_n}$, в частности $I^n = \underbrace{I \times \dots \times I}_n$ — единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$.

Для любого множества вида $A = A_1 \times \dots \times A_n$, $A_j \subset \overline{\mathbb{C}}, j = 1, \dots, n$, полагаем

$$A' = (\overline{\mathbb{C}} \setminus A_1) \times \dots \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus A_n) \text{ и } A^* = (A')^{-1}.$$

Возьмем теперь некоторое множество $\Lambda = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n$, удовлетворяющее условию $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$.

Через $\mathcal{U}(\Lambda)$ обозначим, как и при $n = 1$, семейство областей $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, для которых $\Omega \cdot \Lambda^* \subset \Omega$.

В том случае когда $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ поликруговая область, $\Omega \in \mathcal{U}(\Lambda)$ и каждая из плоских областей $\Omega_j, j = 1, \dots, n$ односвязна будем обозначать $\Omega \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$. Если же $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, то множество областей $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, для которых $\Omega \cdot \Lambda^* \subset \Omega$, обозначим $\mathcal{U}^n(\Lambda)$.

Например, семейство $\mathcal{U}^n(I)$ состоит из всех возможных полных круговых областей с центром в начале координат.

Возьмем некоторую точку $z \in \mathbb{C}^n$ отличную от начала координат и для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, содержащей точку нуль, обозначим

$$\Omega_z = \{\lambda \in \mathbb{C} : z\lambda \in \Omega\}.$$

Ясно, что Ω_z является областью на плоскости $\mathbb{C}$ и, если $\Omega \in \mathcal{U}^n(\Lambda)$, то $\Omega_z \in \mathcal{U}(\Lambda)$.

Отметим, что $z \cdot \Omega_z$ - множество точек лежащих в пересечении области Ω с комплексной прямой $\omega = \lambda z$.

Тот факт, что $\Omega \in \mathcal{U}^n(\Lambda)$ и для всех $z \neq 0$ область Ω_z односвязна, будем обозначать $\Omega \in \mathcal{U}_0^n(\Lambda)$.

Аналогично одномерному случаю определим функции

$$\Psi(t) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \Psi_\alpha t^\alpha, \Psi_\alpha \neq 0 \text{ и } \Psi_{-1}(t) = \sum_{|\alpha| \geq 0} (\Psi_\alpha)^{-1} t^\alpha$$

и каждой голоморфной в нуле функции (1.16) поставим в соответствие функцию

$$g(\omega) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{f_\alpha}{\Psi_\alpha} \omega^\alpha.$$

В том случае, когда Λ поликруговая область и $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$ соотношение $\Psi(t) \in G(\Lambda)$, также как и в одномерном

случае, будет означать, что обе функции $\Psi(t)$ и $\Psi_1(t)$ голоморфно и однозначно продолжаются в область Λ .

Теорема 1.4. Пусть область $\Omega \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, Λ - поликруговая область, $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$ и $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. Тогда для любой функции $f(z)$, заданной рядом (1.16) и голоморфной в области Ω , имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} \dots \int g(\omega) \Psi \left(\frac{z_1}{\omega_1}, \dots, \frac{z_n}{\omega_n} \right) \frac{d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_n}{\omega_1 \dots \omega_n}, \quad (1.19)$$

справедливое для всех $z \in S_\Gamma(\Lambda) \stackrel{def}{=} S_{\Gamma_1}(\Lambda_1) \times \dots \times S_{\Gamma_n}(\Lambda_n)$.

Здесь каждая кривая Γ_j цикла $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n \subset \Omega$ удовлетворяет тем же условиям, что и в плоском случае.

Доказательство теоремы 1.4 проводится в точности так же, как и в случае одной переменной. Формула (1.19) при

$$\Psi(t) = \frac{1}{(1-t_1) \dots (1-t_n)}$$

совпадает с интегральной формулой Коши в $\mathbb{C}^n$.

В общем случае, при условии $\Psi(t) \in G(\Lambda)$ она осуществляет аналитическое продолжение ряда (1.16) в любую область $\Omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} = \mathcal{U}_0(\Lambda)$.

В частности при $\Lambda = [\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)]^n$ получаем голоморфное и однозначное продолжение функции $f(z)$ в n -звездную звезду Миттаг-Леффлера N_f .

Сформулируем еще многомерный аналог теоремы 1.1.

Теорема 1.5. Пусть Λ - поликруговая область в $\mathbb{C}^n$, $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$ и область $\Omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F} = \mathcal{U}_0(\Lambda)$. Тогда, если степенные ряды

$$\Psi(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \Psi_\alpha t^\alpha \quad \text{и} \quad a(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} a_\alpha z^\alpha$$

голоморфно продолжаются в области Λ и Ω , соответственно, то их композиция по Адамару

$$a * \Psi(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} a_\alpha \Psi_\alpha z^\alpha$$

голоморфно продолжается в область Ω .

В том случае, когда $\Lambda \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, множество $G(\Lambda)$ вновь является коммутативной группой относительно операции $*$.

В качестве примера покажем теперь, что гипергеометрическая функция Лауричелла [39]

$$F_D^{(n)}(a; b_1, \dots, b_n; c; t_1, \dots, t_n) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{(a)_{\|\alpha\|} (b_1)_{\alpha_1} \dots (b_n)_{\alpha_n}}{(c)_{\|\alpha\|} \alpha_1! \dots \alpha_n!} t^\alpha,$$

где параметры $a, c, b_k, k = 1, \dots, n$ не равны нулю или целому отрицательному числу, принадлежит группе $G(\Lambda)$, $\Lambda = [\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)]^n$.

Очевидно, что функция

$$\mathcal{P}(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{(b_1)_{\alpha_1} \dots (b_n)_{\alpha_n}}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} t^\alpha$$

принадлежит $G(\Lambda)$. Осталось показать, что функция

$$Q_n(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{(a)_{\|\alpha\|}}{(c)_{\|\alpha\|}} t^\alpha$$

также принадлежит группе $G(\Lambda)$, ибо тогда по теореме 1.5 то же утверждение будет иметь место и для функции $F_D^{(n)}$.

Заметим также, что вместо $Q_n \in G(\Lambda)$ достаточно доказать лишь, что $Q_n(t)$ голоморфна в Λ .

Применим метод математической индукции по n .

Случай $n = 1$ разобран в параграфе 1.2. Далее имеем легко проверяемое тождество: $Q_n(t_1, \dots, t_n) = Q_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) +$

$$\begin{cases} t_n \frac{Q_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) - Q_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-2}, t_n)}{t_{n-1} - t_n} & \text{при } t_{n-1} \neq t_n \\ t_n \frac{\partial Q_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})}{\partial t_{n-1}} & \text{при } t_{n-1} = t_n \end{cases}$$

по предположению индукции Q_{n-1} голоморфна в области $[\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)]^{n-1}$.

Из тождества видим, что функция $Q_n(t_1, \dots, t_n)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ по каждому переменному при фиксированных остальных лежащих также в $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$.

По теореме Гартогса функция $Q_n(t_1, \dots, t_n)$ голоморфна в области Λ , что и требовалось доказать.

Применяя формулу (1.12) мы можем получить аналитическое продолжение ряда (1.16) в области существенно более общего вида, если воспользуемся основным принципом аналитического продолжения кратных степенных рядов [31].

Пусть теперь Λ плоское множество, $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$ и

$$B_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < \rho^2\}$$

некоторый шар радиуса $\rho > 0$.

Предположим, что сумма ряда (1.16) голоморфна в области $\Omega \in \mathcal{U}_0^n(\Lambda)$.

Зафиксируем точку $z \in \partial B_\rho$ и рассмотрим сужение $f_z(\lambda) = f(z \cdot \lambda)$ функции $f(z)$ на комплексную прямую $\omega = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Известно [27, стр. 214], что функция $f_z(\lambda)$ голоморфна в области Ω_z и имеет в окрестности $\lambda = 0$ разложение в ряд Тейлора

$$f_z(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) \lambda^k, \quad p_k(z) = \sum_{\|\alpha\|=k} f_{\alpha} z^{\alpha}. \quad (1.20)$$

Применяя формулу (1.12) к степенному ряду (1.20), приходим к интегральному представлению

$$f(z\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} g(z\sigma) \Psi\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (1.21)$$

где $\Psi(t) \in G(\Lambda)$ - задана рядом (1.4), $\Gamma_z \subset \Omega_z$ плоская кривая, удовлетворяющая тем же условиям, что и кривая Γ в формуле (1.12), $\lambda \in S_{\Gamma_z}(\Lambda)$ и, наконец, функция $g(\omega)$, $\omega \in \mathbb{C}^n$ определяется своим разложением в ряд

$$g(\omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{f_{\alpha}}{\Psi_{\|\alpha\|}} \omega^{\alpha}.$$

Для любого $z \in \partial B_{\rho}$ формула (1.21) голоморфно продолжает функцию $f_z(\lambda) = f(z\lambda)$ в область Ω_z .

Отсюда, согласно основному принципу аналитического продолжения кратных степенных рядов [31], формула (1.21) продолжает голоморфно сумму ряда (1.16) в область

$$\bigcup_{z \in \partial B_{\rho}} z \cdot \Omega_z = \Omega.$$

Так как Ω произвольная область семейства $\mathcal{U}_0^n(\Lambda)$, то тем самым показано, что формула (1.21) позволяет осуществить голоморфное и однозначное продолжение суммы ряда (1.16) в любую область семейства $\mathcal{U}_0^n(\Lambda)$, не содержащую особых точек этой суммы.

В частности, при $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ получаем аналитическое продолжение функции $f(z)$ в ее звезду Миттаг-Леффлера M_f .

ГЛАВА 2

КРАТНЫЕ РЯДЫ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 2.1. Общий класс многочленов многих комплексных переменных

Боас и Бак в своей монографии [35] вводят общее семейство многочленов $P_n(z)$ одной комплексной переменной при помощи следующего формального производящего соотношения

$$a(\omega) \cdot \Psi(z \cdot b(\omega)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) \omega^n, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega^n, \quad a_0 \neq 0, \\ \Psi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n, \quad \Psi_n \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots \\ b(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega^n, \quad b_1 \neq 0. \end{aligned}$$

Оно оказалось очень удобным для построения теории разложения голоморфных функций по многочленам $P_n(z)$.

С другой стороны, оно оказалось настолько широким, что охватило почти все известные многочлены, введенные тем или иным способом в литературу.

Отметим, например, такие частные случаи:

1. $a(\omega) = (1 - \omega)^{1-\lambda}$, $\Psi(t) = e^t$, $b(\omega) = \frac{\omega}{\omega-1}$, $p_n(z) = L_n^{(\lambda)}(z)$ - полиномы Лагерра.

2. $a(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}}$, $\Psi(t) = e^t$, $b(\omega) = \omega$, $p_n(z) = \frac{H_n(z)}{2^n n!}$, где $H_n(z)$ - полиномы Эрмита.

3. $a(\omega) = (1 + \omega^2)^{-\lambda}$, $\Psi(t) = (1 - t)^{-\lambda}$, $b(\omega) = \frac{2\omega}{1+\omega^2}$, $p_n(z) = C_n^\lambda(z)$ - полиномы Гегенбауэра, в частности при $\lambda = \frac{1}{2}$ это многочлены Лежандра, а при $\lambda = 1$ многочлены Чебышева второго рода.

4. $a(\omega) = (1 - \omega)^{-1-\alpha-\beta}$, $\Psi(t) = {}_2F_1\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}, \frac{2+\alpha+\beta}{2}, 1 + \alpha; t\right)$, $b(\omega) = \frac{-4\omega}{(1-\omega)^2}$, $p_n(z) = \frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n} p_n^{(\alpha,\beta)}(1-2z)$, где $p_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ - полиномы Якоби.

Большое количество других частных случаев, а также общие свойства многочленов $p_n(z)$, определенных соотношением (2.1), можно найти в [35].

Обобщая производящее соотношение (2.1) на случай многих переменных, приходим к следующему семейству полиномов $p_\alpha(z) = p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z_1, \dots, z_n)$

$$a(\omega) \cdot \psi(z \cdot b(\omega)) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha, \quad (2.2)$$

где

$$a(\omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} a_\alpha \omega^\alpha, \quad a_{\underbrace{0 \dots 0}_n} \neq 0,$$

$$z \cdot b(\omega) = (z_1 \cdot b_1(\omega), \dots, z_n \cdot b_n(\omega)),$$

$$b_j(\omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} b_{\alpha,j} \omega^\alpha, \quad b_{\underbrace{0 \dots 0}_n,j} = 0, \quad b_{\underbrace{0 \dots 0}_j 1_{0 \dots 0,j}} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Psi(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \Psi_\alpha \cdot t^\alpha, \quad \Psi_\alpha \neq 0 \quad \text{для всех } \alpha.$$

Подобное обобщение многочленов (2.1) рассматривалось в работах Какичева В.А., Деревянченко Г.Д. [14] и Сторчевой Г.Д. [22].

Из формулы (2.2) легко следует, что $p_\alpha(z)$ действительно полином степени $\|\alpha\|$, причем содержит член $c_\alpha z^\alpha$ с отличным от нуля коэффициентом c_α .

Более того, аналогично одномерному случаю [35] можно определить общий вид многочленов (2.2).

Теорема 2.1. Полиномы, заданные соотношением (2.2), имеют следующий явный вид:

$$p_\alpha(z) = \sum_{\|\beta\| \leq \|\alpha\|} \Psi_\beta z^\beta \sum_{\gamma_0 + \dots + \gamma_{\|\beta\|} = \alpha} a_{\gamma_0} \cdot b_{\gamma_1,1} \dots b_{\gamma_{\beta_1},1} \cdot b_{\gamma_{\beta_1}+1,2} \dots b_{\gamma_{\beta_1}+\beta_2,2} \cdot b_{\gamma_{\beta_1}+\beta_2+1,3} \dots b_{\gamma_{\|\alpha\|},n} \quad (2.3)$$

Здесь $\gamma_0, \dots, \gamma_{\|\beta\|}$ - мультииндексы и внутренняя сумма распространяется на всевозможные решения системы линейных уравнений:

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_{\|\beta\|} = \alpha.$$

Доказательство.

Положим

$$K(z, \omega) = a(\omega) \cdot \Psi(z \cdot b(\omega)), \quad p_\alpha(z) = \sum_{\|\beta\| \leq \|\alpha\|} p_{\alpha,\beta} z^\beta,$$

тогда равенство (2.2) с учетом этого примет вид

$$K(z, \omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \omega^\alpha \sum_{\|\beta\| \leq \|\alpha\|} p_{\alpha, \beta} z^\beta = \sum_{\|\beta\| \geq 0} z^\beta \sum_{\|\alpha\| \geq \|\beta\|} p_{\alpha, \beta} \omega^\alpha,$$

откуда

$$\left. \frac{\partial^{\|\beta\|} K}{\partial z^\beta} \right|_{z=0} = \beta! \sum_{\|\alpha\| \geq \|\beta\|} p_{\alpha, \beta} \omega^\alpha, \quad (2.4)$$

где обозначено

$$\frac{\partial^{\|\beta\|} K}{\partial z^\beta} = \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial z_1^{\beta_1} \dots \partial z_n^{\beta_n}}, \quad \beta! = \beta_1! \dots \beta_n!.$$

Подставив вместо $K(z, \omega)$ его выражение в производную $\frac{\partial^{\|\beta\|} K}{\partial z^\beta}$, найдем

$$\frac{\partial^{\|\beta\|} K}{\partial z^\beta} = a(\omega) \left. \frac{\partial^{\|\beta\|} \Psi}{\partial t^\beta} \right|_{t=z \cdot b(\omega)} \cdot [b(\omega)]^\beta$$

Следовательно (2.4) перепишется так

$$a(\omega) \left. \frac{\partial^{\|\beta\|} \Psi}{\partial t^\beta} \right|_{t=0} [b(\omega)]^\beta = \beta! \sum_{\|\alpha\| \geq \|\beta\|} p_{\alpha, \beta} \omega^\alpha,$$

или

$$\sum_{\|\alpha\| \geq \|\beta\|} p_{\alpha, \beta} \omega^\alpha = a(\omega) \Psi_\beta [b(\omega)]^\beta \quad (2.5)$$

Разложив теперь правую часть (2.5) в ряд (перемножив $\|\beta\| + 1$ рядов стоящих в правой части (2.5)) и, приравнявая коэффициенты при ω^α ,

мы находим для $P_{\alpha,\beta}$ следующее выражение

$$P_{\alpha,\beta} = \Psi_\beta \cdot \sum_{\gamma_0 + \dots + \gamma_{\|\beta\|} = \alpha} a_{\gamma_0} \cdot b_{\gamma_1,1} \dots b_{\gamma_{\beta_1},1} \cdot b_{\gamma_{\beta_1+1},2} \dots b_{\gamma_{\|\beta\|},n},$$

что и доказывает формулу (2.3).

Теорема 2.1 доказана.

Если взять $b(\omega) = \omega$, т.е. $b_j(\omega) = \omega_j, j = 1, \dots, n$, то формула (2.3) принимает особенно простой вид:

$$P_\alpha(z) = \sum_{\|\beta\| \leq \|\alpha\|} \Psi_\beta \cdot a_{\alpha-\beta} z^\beta. \quad (2.6)$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы не ограничиваемся формальным соотношением (2.2), а предполагаем, что участвующие в нем функции $a(\omega)$ и $\Psi(t)$ голоморфны, а отображение $\zeta = b(\omega)$ биголоморфно, в некоторой окрестности начала координат.

Предположим более конкретно, что в некоторой полной области Рейнхарта $\mathcal{R}$ с центром в нуле отображение $\zeta = b(\omega)$ биголоморфно, а функция $a(\omega)$ голоморфна и $a(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in \mathcal{R}$.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ область, в которую голоморфно и однозначно продолжается функция $\Psi(t)$.

Через D_r обозначим образ поликруга $I_r^n \in \mathcal{R}$ при отображении $\zeta = b(\omega)$ и рассмотрим область

$$\Omega_r = \{z \in \mathbb{C}^n : z \overline{D_r} \subset \Lambda\}$$

При каждом фиксированном значении $z \in \mathbb{C}^n$ ряд (2.2) является степенным относительно $\omega \in \mathbb{C}^n$.

В тех случаях, когда область его сходимости непуста, он является рядом Тейлора для функции

$$a(\omega) \cdot \Psi(z \cdot b(\omega)).$$

Отсюда следует, что ряд (2.2) абсолютно сходится при $(z, \omega) \in \Omega_r \times I_r^n$.

Это замечание позволяет исследовать область сходимости ряда по полиномам (2.2)

$$\sum_{\|\alpha\| \geq 0} c_\alpha p_\alpha(z), \quad c_\alpha \in \mathbb{C}, \quad (2.7)$$

при некоторых ограничениях на коэффициенты c_α .

Теорема 2.2. Пусть $W \subset \mathbb{C}^n$ область сходимости ряда

$$\sum_{\|\alpha\| \geq 0} c_\alpha z^\alpha, \quad (2.8)$$

причем $V = \mathcal{R} \cap (\partial W)^{-1} \neq \emptyset$. Тогда ряд (2.7) абсолютно сходится в области

$$\Omega = \bigcup_{r \in |V|_+} \Omega_r.$$

Доказательство.

Пусть $\rho \in |V|_+$. Выберем $z \in |\mathcal{R}|_+$ так, чтобы $\rho \in |I_r|_+$. Тогда $I_\rho^n \subseteq I_r^n \subset \mathcal{R}$. Из определения области V следует, что $(I_r^n)' \subset W^{-1}$.

Последнее означает, что

$$\overline{I_{r-1}^n} = \frac{1}{(I_r^n)'} \subset W \text{ или } I_{r-1}^n \subseteq W.$$

Отсюда имеем неравенство

$$\lim_{\|\alpha\| \rightarrow \infty} \|\alpha\| \sqrt[|\alpha|]{|c_\alpha| \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^\alpha} < 1,$$

из которого при достаточно больших значениях $\|\alpha\|$ и некотором $\varepsilon > 0$ находим $|c_\alpha| < (1 - \varepsilon)^{\|\alpha\|} \cdot r^\alpha = [(1 - \varepsilon) r]^\alpha$.

Теперь, применяя это неравенство, получаем

$$\left| \sum_{\|\alpha\| \geq 0} c_\alpha p_\alpha(z) \right| \leq \sum_{\|\alpha\| \geq 0} |c_\alpha| \cdot |p_\alpha(z)| < \sum_{\|\alpha\| \geq 0} |p_\alpha(z)| [(1 - \varepsilon) r]^\alpha. \quad (2.9)$$

Так как $(1 - \varepsilon) r = ((1 - \varepsilon)r_1, \dots, (1 - \varepsilon)r_n) \in I_r^n$, то ряд в правой части неравенства (2.9) сходится для всех $z \in \Omega_r$.

Из определения области Ω_r очевидно следует, что $\Omega_r \subset \Omega_\rho$. Поскольку областями $\Omega_r, r \in |I_\rho|_+$ можно исчерпать всю область Ω_ρ , то тем самым доказано, что ряд (2.7) абсолютно сходится для всех $z \in \Omega_\rho$.

Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.1. В обозначениях теоремы 2.2 положим

$$V_1 = \{z \in V : z \cdot I^n \cap V = \emptyset\}.$$

Тогда область сходимости ряда (2.7) можно определить так:

$$\Omega = \bigcup_{r \in |V|_+} \Omega_r.$$

Доказательство.

Мы уже видели, что если $\rho \in |I_r^n|_+$, то $\Omega_r \subset \Omega_\rho$. По определению V_1 для любого $r \in |V|_+$ существует $\rho \in |V_1|_+$ такое, что $I_\rho^n \subset I_r^n$.

Поэтому

$$\bigcup_{r \in |V|_+} \Omega_r = \bigcup_{z \in |V_1|_+} \Omega_r.$$

Следствие 2.1. доказано.

Допустим, что $r = (r_1, \dots, r_n)$ сопряженные радиусы сходимости степенного ряда (2.8) и $Q(r)$ - поверхность сопряженных радиусов, тогда $[Q(r)]^{-1} = |V_1|_+$ и область сходимости ряда (2.8), при условии, что $Q(r) \cap R \neq \emptyset$ может быть описана следующим образом

$$\Omega = \bigcup_{r^{-1} \in Q(r)} \Omega_r.$$

§ 2.2. Разложение функций, голоморфных в начале координат, в ряды полиномов. Одномерный случай

Для полиномов (2.1) обозначения, используемые в предыдущем параграфе, претерпевают несущественные изменения.

Предполагаем, что $\mathcal{R} = I_\rho$, $\rho > 0$ и функция $a(\omega)$ голоморфна, $b(\omega)$ однолистка в круге I_ρ , функция $\Psi(t)$ голоморфна и однозначна в области Λ , содержащей начало координат.

Если $0 < r < \rho$, то $D_r = b(I_r)$ и $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{D}_r \subset \Lambda\}$.

В следующей лемме приведены некоторые утверждения, касающиеся областей Ω_r .

Лемма 2.1. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, $1 \in \Lambda'$ и $D_r \in \mathcal{U}(\Lambda)$, тогда

$$\Omega_r = (\overline{D_r})^*, \quad \overline{\Omega_r} = D_r^* \quad \text{и} \quad \Omega_r \in \mathcal{U}(\Lambda).$$

Доказательство.

Пусть $D_r \in \mathcal{U}(\Lambda)$. По определению это означает, что $D_r \cdot \Lambda^* \subset D_r$.

Применяя утверждение 2 леммы 1.1, находим, что $\overline{D_r} \cdot \Lambda^* = \overline{D_r \cdot \Lambda^*} \subset \overline{D_r}$, т.е. $\overline{D_r} \in \mathcal{U}(\Lambda)$.

Согласно лемме 1.2, тогда $\overline{D_r}^* \in \mathcal{U}(\Lambda)$, т.е. $[(\overline{D_r}^*)' \cdot \Lambda']' = (\overline{D_r})^*$.

По лемме 1.1 (утверждение 3), находим

$$(\overline{D_r})^* = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{D_r} \subset \Lambda\} = \Omega_r.$$

Для доказательства второго равенства достаточно заметить, что при гомотопическом преобразовании $\omega = z^{-1}$ граница ∂D_r переходит в границу $\partial \Omega_r$.

Наконец, уже доказанное соотношение $\overline{D_r} \cdot \Lambda^* \subset \overline{D_r}$ перепишем в виде $(\overline{D_r})^{-1} \cdot \Lambda' \subset (\overline{D_r})^{-1}$, что с учетом утверждения 1 леммы 1.1 примет вид $\Omega_r' \cdot \Lambda' \subset \Omega_r'$. По лемме 1.2 это означает, что $\Omega_r \in \mathcal{U}(\Lambda)$.

Лемма 2.1 доказана.

Теорема 2.3. Пусть $I \subset \Lambda \subset \mathbb{C}$, Λ - область и $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. Если для данного $r \in (0, \rho)$ существует такое $\varepsilon \in (0, \rho - r)$, что $D_\tau \in \mathcal{U}(\Lambda)$ для всех $\tau \in [r, r + \varepsilon)$, то любая функция $f(z)$, голоморфная в области Ω_r , разлагается в ряд полиномов, заданных соотношением (2.1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z). \quad (2.10)$$

При этом ряд (2.10) сходится к функции $f(z)$ в каждой точке $z \in \Omega_r$ и равномерно сходится на компактных подмножествах области Ω_r .

Доказательство.

Обозначим через $\omega = b^{-1}(\xi)$ обратное отображение для $\xi = b(\omega)$. Положим $\zeta^{-1} = b(\omega)$, $\omega = b^{-1}(\zeta^{-1})$. Тогда соотношение (2.1) запишется в виде

$$\Psi\left(\frac{z}{\zeta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) \cdot \frac{[b^{-1}(\zeta^{-1})]^n}{a[b^{-1}(\zeta^{-1})]} \quad (2.11)$$

Мы будем считать область Λ минимальным множеством (лемма 1.4), поэтому $1 \in \Lambda'$.

Так как, по лемме 2.1, $\Omega_\tau \in \mathcal{U}(\Lambda)$ при $\tau \in [r, r + \varepsilon)$, то $\Omega_\tau \cdot \Lambda^* = \Omega_\tau$, для указанных, τ , откуда $\overline{\Omega}_\tau \cdot \Lambda^* = \overline{\Omega}_\tau$.

По лемме 1.2 это равносильно равенству $\overline{\Omega}'_\tau \cdot \Lambda' = \overline{\Omega}'_\tau$. Теперь, используя лемму 1.1, имеем

$$\overline{\Omega}_\tau = (\overline{\Omega}'_\tau \cdot \Lambda')' = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot (\overline{\Omega}_\tau)^* \subset \Lambda\} = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot D_\tau \subset \Lambda\},$$

т.к. $\overline{\Omega}_\tau = D_\tau^*$ (лемма 2.1) и, следовательно, $\overline{\Omega}'_\tau = (D_\tau)^{-1}$ (лемма 1.1).

Итак пусть $\tau \in (r, r + \varepsilon)$. Рассматривая ряд (2.1) как степенной ряд относительно ω , заключаем, что он сходится при $(z, \omega) \in \{z \in \mathbb{C} : z D_\tau \subset \Lambda\} \times I_\tau = \overline{\Omega}_\tau \times I_\tau$.

Тогда ряд (2.11) сходится при $(z, \zeta) \in \overline{\Omega}_\tau \times D_\tau^{-1} = \overline{\Omega}_\tau \times \overline{\Omega}'_\tau$.

Пусть теперь $r < \tau_1 < \tau$, тогда $\Omega_\tau \Subset \Omega_{\tau_1} \Subset \Omega_r$.

По теореме 1.2 мы имеем интегральное представление (1.12), с $\Gamma = \partial\Omega_{\tau_1}$, для всякой функции $f(z)$ голоморфной в Ω_τ и для всех $z \in \overline{\Omega}_\tau$.

Но ряд (2.11) сходится равномерно при $(z, \zeta) \in \overline{\Omega}_\tau \times \partial\Omega_{\tau_1}$, поэтому, подставляя его в формулу (1.12) и почленно интегрируя, приходим к разложению (2.10) с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_{\tau_1}} g(\zeta) \frac{[b^{-1}(\zeta^{-1})]^n}{a[b^{-1}(\zeta^{-1})]} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Мы доказали, что ряд (2.10) сходится равномерно к $f(z)$ в любом компакте $\overline{\Omega}_r \subset \Omega_r$. Осталось заметить, что компактami $\overline{\Omega}_r$ можно исчерпать всю область Ω_r .

Теорема 2.3 доказана.

В монографии [35] рассматривался частный случай $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ теоремы 2.3. При этом предполагалось, что функция $\Psi(t)$, вместо нашего условия $\Psi(t) \in G(\Lambda)$ удовлетворяет двум следующим:

- α) $\Psi(t)$ голоморфно продолжается в область $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$,
- β) разрешима проблема моментов Хаусдорфа

$$\frac{1}{\Psi_n} = \int_0^1 u^n d\mu(u), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $\mu(u)$ функция, имеющая ограниченную вариацию на отрезке $[0, 1]$.

Требования α и β сильнее нашего. Действительно, если имеет место β , то

$$\Psi_{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Psi_n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^1 u^n d\mu(u) = \int_0^1 \frac{d\mu(u)}{1 - tu},$$

откуда следует, что функция $\Psi_{-1}(t)$ голоморфна и однозначна в области $\Lambda = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$. А это вместе с условием α влечет соотношение $\Psi(t) \in G(\Lambda)$.

С другой стороны рассмотрим простой контрпример

$$\Psi(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

В данном случае $\Psi_n^{-1} = n+1$. Как известно ([19], стр. 439-441),

для разрешимости проблемы моментов β необходимо и достаточно, чтобы была равномерно по n ограничена сумма

$$\sigma = \sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \Psi_n^{-1}|,$$

где

$$\Delta^0 \Psi_n^{-1} = \Psi_n^{-1}, \quad \Delta^{k+1} \Psi_n^{-1} = \Delta^k \Psi_n^{-1} - \Delta^k \Psi_{n+1}^{-1}.$$

Здесь, очевидно, $\sigma > \frac{1}{\Psi_n} = n + 1 \rightarrow \infty$, что показывает, что проблема моментов β неразрешима для данной функции $\Psi(t)$.

Однако

$$\Psi_{-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n = (1-t)^{-2}$$

голоморфно продолжается в Λ , следовательно $\Psi(t) \in G(\Lambda)$.

В монографии [35] (§ 17, глава 3) теория разложения ошибочно применяется к полиномам Якоби $p_k^{(\alpha, \beta)}(z)$, которые задаются производящей функцией:

$$\begin{aligned} (1-\omega)^{-1-\alpha-\beta} {}_2F_1 \left[\frac{1+\alpha+\beta}{2}, \frac{2+\alpha+\beta}{2}, 1+\alpha; \frac{-4\omega z}{(1-\omega)^2} \right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n} p_n^{(\alpha, \beta)}(1-2z) \omega^n, \alpha > 1, \beta > 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вычисления показывают, что и здесь проблема моментов,

$$\frac{1}{\Psi_k} = \frac{(1+\alpha)_k \cdot k!}{\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right)_k \left(\frac{2+\alpha+\beta}{2}\right)_k} = \int_0^1 u^k d\mu(u),$$

вообще говоря, не разрешима и, следовательно, функция

$$\Psi(t) = {}_2F_1 \left[\frac{1+\alpha+\beta}{2}, \frac{2+\alpha+\beta}{2}, 1+\alpha; t \right]$$

не удовлетворяет условиям теоремы 13.5 монографии [35].

Но в § 1.2 мы доказали, что такая функция $\Psi(t) \in G(\Lambda)$, поэтому теорема 2.3 применима к производящему соотношению (2.12) и для полиномов

$$\frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{(\alpha + 1)_n} p_n^{(\alpha, \beta)}(z) \quad (\text{а значит и для } p_n^{(\alpha, \beta)}(z))$$

мы имеем известный результат о том, что любая функция, голоморфная в эллипсе с фокусами в точках $-1, 1$, разлагается в ряд по этим полиномам.

Отметим теперь, что условия применения теоремы 2.3 к производящему соотношению (2.1) состоят из сопряженных требований, налагаемых на функцию $\Psi(t)$ и отображение $\zeta = b(\omega)$, поэтому при построении производящей функции (2.1) можно исходить либо из фиксированной функции $\Psi(t)$ и подбирать для нее соответствующие отображения $\zeta = b(\omega)$, либо, наоборот, фиксировать отображение $\zeta = b(\omega)$, а вместе с ним и области Ω_r , и подбирать соответствующую функцию $\Psi(t)$ так, чтобы получить простые многочлены, удобные для разложения по ним функций, голоморфных в областях Ω_r .

Возьмем, например, $\Lambda = \mathbb{C} \setminus E$, где E — множество корней степени n из единицы и $\Psi(t) \in G(\Lambda)$.

Условие $D_\tau \in \mathcal{U}(\Lambda)$ равносильно тому, что область D_τ инвариантна относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$ (пример 5 из параграфа 1.3).

Как известно (например, [2, стр. 155]) для этого при любом $\tau \in (0, \rho)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $b(\omega)$ имела в окрестности нуля лакунарное разложение

$$b(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kn+1} \omega^{kn+1}.$$

Приведем конкретный пример:

$$\frac{(1 + \frac{z\omega}{1+\omega^n})^{n-1}}{1 - (\frac{z\omega}{1+\omega^n})^n} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) \omega^k \quad (2.13)$$

Здесь

$$\Psi(t) = \frac{(1+t)^{n-1}}{1-t^n}$$

и легко проверить, что

$$\Psi(t) \in G(\Lambda), \quad \Lambda = \mathbb{C} \setminus E.$$

Далее, $b(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^n}$ имеет нужное разложение в окрестности нуля.

Отображение $\zeta = \frac{\omega}{1+\omega^n}$ однозначно в I_ρ , $\rho = \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$. При

$0 < r < \rho$ область Ω_r является внутренностью гипотрохиды (рис. 2)

$$\begin{cases} x = r^{-1} \cos \varphi + r^{n-1} \cos(n-1)\varphi \\ y = -r^{-1} \sin \varphi + r^{n-1} \sin(n-1)\varphi \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2.14)$$

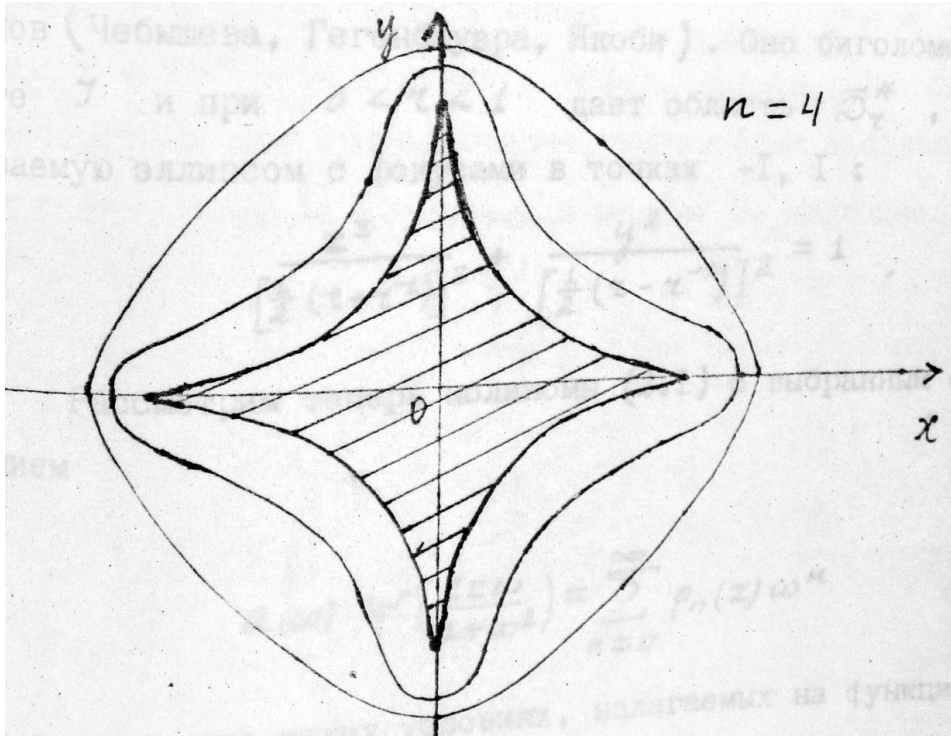


Рис. 2.

Таким образом, любая функция голоморфная внутри кривой (2.14) (при $0 < r < \rho$) может быть представлена сходящимся внутри этой кривой рядом по полиномам (2.13). Многочлены (2.13) очень просты. Например, при $n = 4$

$$p_0(z) = 1, \quad p_1(z) = 3z, \quad p_2(z) = 3z^2, \quad p_3(z) = z^3, \quad p_4(z) = z^4,$$

$p_5(z) = z^5 - 3z$, $p_6(z) = z^6 - 6z^2$, $p_7(z) = z^7 - 3z^3$, $p_8(z) = z^8 - 4z^4$,
 $p_9(z) = z^9 - 5z^5 + 3z$, $p_{10}(z) = z^{10} - 6z^6 + 9z$, и т.д.

Используя производящее соотношение (2.13), о многочленах $p_k(z)$ можно получить различную информацию: рекуррентные соотношения, формулу дающую явный вид и т.п.

Поступим теперь наоборот. Возьмем отображение

$$\zeta = \frac{2\omega}{1 + \omega^2},$$

используемое в производящей функции классических многочленов (Чебышева, Гегенбауэра, Якоби). Оно биголоморфно в круге I и при $0 < r < 1$ дает область $\overline{D}_r^*$, ограниченную эллипсом с фокусами в точках -1 , 1 :

$$\frac{x^2}{[\frac{1}{2}(r + r^{-1})]^2} + \frac{y^2}{[\frac{1}{2}(r - r^{-1})]^2} = 1.$$

Рассмотрим теперь полиномы (2.1) с выбранным отображением

$$a(\omega) \cdot \Psi\left(\frac{2z\omega}{1 + \omega^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)\omega^n \quad (2.15)$$

и выясним при каких условиях, налагаемых на функцию $\Psi(t)$, многочлены (2.15) годятся для разложения в ряды по ним функций, голоморфных в эллиптической области $\overline{D}_r^*$.

По теореме 2.3 для этого достаточно требования $\Psi(t) \in G(\Lambda)$,

$$\Lambda = \bigcup_{r \leq \tau < r + \varepsilon} D_\tau \cdot D_\tau^*, \quad 0 < \varepsilon < 1 - r.$$

Мы воспользуемся следующей формулой

$$\sup_{\lambda > 0} \{\lambda : \lambda e^{i\varphi} \cdot \mathcal{D}_r^* \subset \mathcal{D}_r^*\} = \left[\frac{2r^2 \sin \varphi}{1 - r^4} + \sqrt{\frac{4r^4 \sin^2 \varphi}{(1 - r^4)^2} + 1} \right]^{-1}, \quad (2.16)$$

справедливой при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Применяя формулу (2.16), нетрудно убедиться, что $\Lambda_\tau = D_\tau \cdot D_\tau^* =$

$$= \left\{ \rho(\varphi)e^{i\varphi} : \rho(\varphi) < \begin{cases} \frac{2\tau^2|\sin\varphi|}{1-\tau^4} + \sqrt{\frac{4\tau^4\sin^2\varphi}{(1-\tau^4)^2} + 1}, & \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, & \varphi \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \right\}$$

Отсюда $I \subset \Lambda_\tau \subset I_\gamma$, $\gamma = \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}$ и $\Lambda_{\tau_1} \subset \Lambda_{\tau_2}$ при $\tau_1 < \tau_2$ (см. рис. 3). Поэтому $\Omega_\tau \in \mathcal{U}(\Lambda_r)$, если $\tau \leq r$. Теперь имеем, $\bigcup_{r \leq \tau < r+\varepsilon} \Lambda_\tau = \Lambda_{r+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon <$

$1-r$ и условие $\Psi(t) \in G(\Lambda_{r+\varepsilon})$ является достаточным для представления, голоморфных в областях Ω_τ , $\tau \leq r$, функций сходящимися рядами по многочленам (2.15).

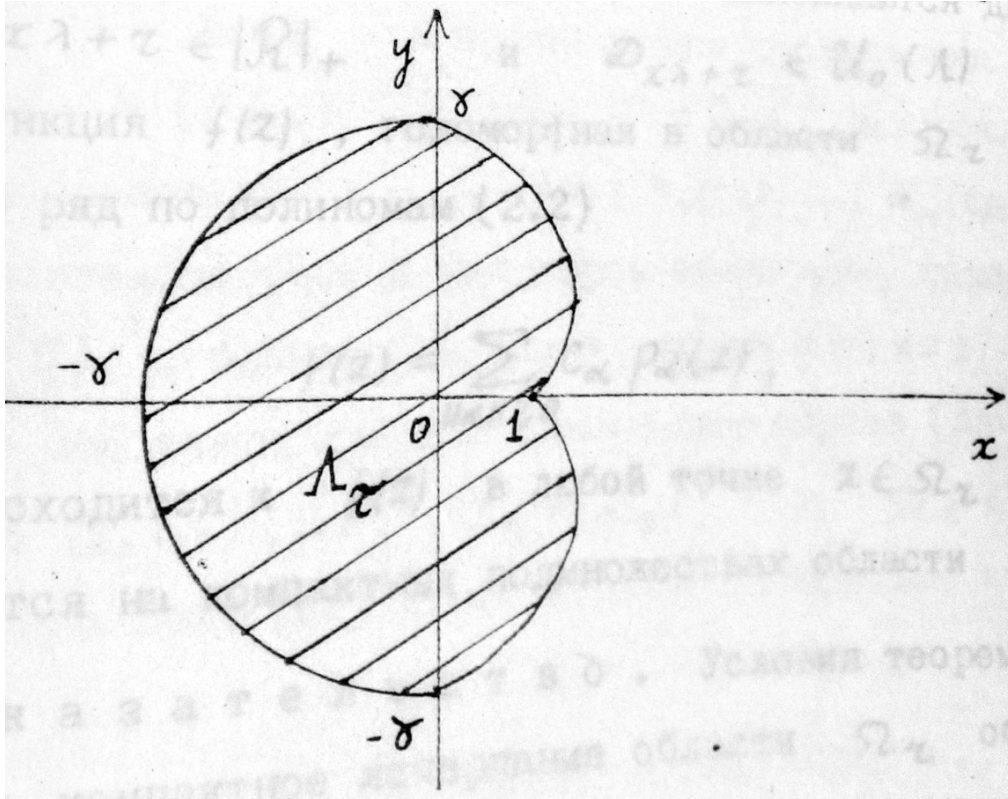


Рис. 3.

Так как $\bigcup_{0 < \tau < 1} \Lambda_\tau = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, то для того, чтобы полиномы (2.15) годились для любых эллиптических областей Ω_τ , $0 < \tau < 1$ достаточно положить $\Psi(t) \in G(\mathbb{C} \setminus [1, +\infty))$.

§ 2.3. Разложение функций, голоморфных в начале координат, в ряды полиномов. Многомерный случай

Здесь результаты предыдущего параграфа будут обобщены на случай многих комплексных переменных. Рассмотрим полиномы, заданные соотношением (2.2), и предположим, что все соглашения и обозначения параграфа 2.1 имеют место.

Прежде всего приведем непосредственное обобщение теоремы 2.3.

Теорема 2.4. Пусть $\Lambda = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n$ поликруговая область в $\mathbb{C}^n$, $I^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$ и функция $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. Если для данного $r \in |\mathcal{R}|_+$ найдется $\varepsilon > 0$ и точка $x \in |I'_r|_+$ такие, что для любого $\lambda \in [0, \varepsilon)$ выполняются два условия: $x\lambda + r \in |\mathcal{R}|_+$ и $D_{x\lambda+r} \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, то любая функция $f(z)$, голоморфная в области Ω_r , разлагается в ряд по полиномам (2.2)

$$f(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} c_\alpha p_\alpha(z), \quad (2.17)$$

который сходится к $f(z)$ в любой точке $z \in \Omega_r$ и равномерно сходится на компактных подмножествах области Ω_r .

Доказательство.

Условия теоремы позволяют построить компактное исчерпание области Ω_r областями $\Omega_{x\lambda+r}$, $\lambda \in (0, \varepsilon)$:

$$\Omega_{x\lambda_1+r} \subset \Omega_{x\lambda_2+r} \subset \Omega_r$$

при $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < \varepsilon$.

Дальнейшее доказательство связано с применением интегрального представления (1.19) и практически дословно совпадает с доказательством теоремы 2.3.

Мы получаем разложение (2.17) с коэффициентами

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} g(\zeta) \frac{[b^{-1}(\zeta^{-1})]^\alpha d\zeta}{a[b^{-1}(\zeta^{-1})] \zeta}, \quad (2.18)$$

где обозначено

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n, \quad \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{\zeta_1 \cdots \zeta_n},$$

$$\omega = b^{-1}(t) \quad \text{отображение обратное к} \quad t = b(\omega).$$

Теорема 2.4 доказана.

Условие $D_r \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, в частности, означает что область D_r является поликруговой областью (см. § 1.5).

Чтобы обеспечить это условие достаточно предположить, что отображение $\zeta = b(\omega)$ в производящем соотношении (2.2) имеет вид $\zeta = h(F(\omega))$, где $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ невырожденное линейное преобразование и

$$h(t) = (h_1(t_1), \dots, h_n(t_n))$$

отображение биголоморфное в некотором поликруге, содержащем область $F(\mathcal{R})$, причем

$$h(0) = 0, h'_k(0) \neq 0, k = 1, \dots, n.$$

Заметим еще, что также как и в одномерном случае (лемма 2.1), если $D_r \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$, то $\Omega_r = (\overline{D_r})^*$ и $\Omega_z \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$.

Многомерную специфику лучше отражает следующее обобщение теоремы 2.3.

Теорема 2.5. Пусть Λ поликруговая область, $\mathbb{C}^n \subset \Lambda \subset \mathbb{C}^n$, $\Psi(t) \in G(\Lambda)$. Если $D_r \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ для всех r из некоторого множества $M \subset \mathbb{R}_+^n$, являющегося областью в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\Omega \in \mathcal{P}_F$, где $F = \{\Omega_r : r \in M\}$, то любая голоморфная в области Ω функция $f(z)$ разлагается в ряд (2.17) по полиномам (2.2),

сходящийся к $f(z)$ в каждой точке $z \in \Omega$ и равномерно сходящийся на компактных подмножествах области Ω .

Доказательство.

Выберем любое $r \in M$. Поскольку M область в пространстве $\mathbb{R}^n$, то для данного r выполняются условия теоремы 2.4.

Поэтому для области Ω_r мы имеем разложение (2.17) с коэффициентами (2.18).

Из формулы (2.18) видим, что коэффициенты c_α зависят лишь от выбора цикла Γ .

Для точек лежащих в общей части любых двух или более областей Ω_r этот цикл можно выбрать одним и тем же сразу для всех этих областей, поэтому коэффициенты c_α не зависят от выбора области Ω_r , $r \in M$.

Таким образом, для данной функции $f(z)$ разложение (2.17) справедливо во всей области Ω . Доказательство равномерной сходимости на компактных подмножествах проводится стандартным для анализа образом.

Теорема 2.5 доказана.

Проиллюстрируем теперь доказанные теоремы, применяя их к некоторым конкретным полиномам (2.2).

Пример 1. Рассмотрим полиномы $p_\alpha(z)$ многих переменных, определенные следующим образом:

$$A(\omega) \prod_{j=1}^n (1 - z_j \cdot \omega_j)^{-\lambda_j} = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha \quad (2.19)$$

где $\lambda_k > 0, k = 1, \dots, n$, ряд

$$A(\omega) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} a_\alpha \omega^\alpha, \quad a_{\underbrace{0 \dots 0}_n} \neq 0$$

сходится в единичном поликруге I^n и $A(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in I^n$.

Легко найти явный вид $p_\alpha(z)$:

$$p_\alpha(z) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} a_\beta \binom{\lambda_1 + \gamma_1 - 1}{\lambda_1 - 1} \cdots \binom{\lambda_n + \gamma_n - 1}{\lambda_n - 1} z^\gamma.$$

Сравнивая (2.19) с (2.2), находим $b_k(\omega) = \omega_k, k = 1, \dots, n$, т.е. отображение $\zeta = b(\omega)$ является тождественным.

Далее

$$\Psi(t) = \prod_{j=1}^n (1 - t_j)^{-\lambda_j} = F_D^{(n)}(1; \lambda_1, \dots, \lambda_n; 1; t_1, \dots, t_n),$$

т.е. $\Psi(t) \in G(\Lambda), \Lambda = [\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)]^n$ (см. § 1.5).

В условии теоремы 2.5, в данном случае, $\mathcal{R} = I^n, D_r = I_r^n \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ для всех $r \in |I^n|_+, \quad \Omega_r = (\overline{D_r})^* = I_{r-1}^n \supset \overline{I}^n$.

Значит $\mathcal{F}$ представляет собой множество всевозможных поликругов $I_\rho^n \supset \overline{I}^n$.

Таким образом, по теореме 2.5, мы имеем следующее утверждение.

Если Ω полная область Рейнхардта, всякий максимальный поликруг которой содержит $\overline{I}^n$, то любая голоморфная в Ω функция $f(z)$ разлагается в области Ω в ряд по полиномам $p_\alpha(z)$, заданным соотношением (2.19).

Заметим, что меняя область сходимости функции $A(\omega)$ мы можем менять ограничения на область Рейнхардта Ω , например, если $A(\omega)$ целая функция, то Ω любая область Рейнхардта в $\mathbb{C}^n$.

Так как отображение $\zeta = b(\omega)$ тождественно, то в производящем соотношении (2.19) в качестве $\Psi(t)$ можем мы выбрать любую функцию, для которой

$$\Psi_\alpha \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\|\alpha\| \rightarrow \infty} \sqrt[\|\alpha\|]{|\Psi_\alpha|} = 1.$$

Для полученных таким образом полиномов, результат будет таким же как и для полиномов (2.19).

Пример 2. Теперь возьмем производящую функцию

$$A(\omega) \cdot \prod_{j=1}^n (1 - z_j b_j(\omega_j))^{-1} = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha, \quad (2.20)$$

где $A(\omega)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и в предыдущем примере, а каждая функция $b_j(\omega_j), j = 1, \dots, n$ биголоморфна в единичном круге I .

Здесь какова бы ни была область $D_r = b(I_r^n), r \in |I^n|_+$ условие $D_r \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ автоматически выполняется, ибо $\Psi(t) = (1 - t_1)^{-1} \dots (1 - t_n)^{-1} \in G(\Lambda)$, $\Lambda = [\mathbb{C} \setminus \{1\}]^n$.

Поэтому, по теореме 2.5, функция $f(z)$, голоморфная в любой области Ω , порожденной семейством $\mathcal{F} = \{\Omega_r = (D_r)^*; r \in |I^n|_+\}$, разлагается в этой области в ряд по полиномам (2.20).

Пример 3. Пусть теперь имеет место соотношение

$$A(\omega) \cdot \prod_{j=1}^n (1 - 2\omega_j z_j + \omega_j^2)^{-\lambda_j} = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha, \quad (2.21)$$

где $\lambda_j > 0, j = 1, \dots, n$, функция $A(\omega)$ та же, что и в примере 1. В данном случае

$$p_\alpha(z) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} a_\alpha C_{\gamma_1}^{\lambda_1}(z_1) \dots C_{\gamma_n}^{\lambda_n}(z_n),$$

где $C_{\gamma_k}^{\lambda_k}(z_k), k = 1, \dots, n$ - полиномы Гегенбауэра [5].

Полиномы $p_\alpha(z)$, заданные соотношением (2.21), являются многомерным аналогом ультрасферических полиномов или полиномов Гегенбауэра.

Перепишем (2.21) в виде

$$A(\omega) \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \omega_j^2)^{-\lambda_j} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{2\omega_j z_j}{1 + \omega_j^2}\right)^{-\lambda_j} = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha.$$

Сравнивая с (2.2), найдем:

$$a\omega = A(\omega) \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \omega_j^2)^{-\lambda_j}, \Psi(t) = (1 - t_1)^{-\lambda_1} \dots (1 - t_n)^{-\lambda_n},$$

$$b_k(\omega) = \frac{2\omega_k}{1 + \omega_k^2}, k = 1, \dots, n, \mathcal{R} = I^n.$$

Из примера 1 мы знаем, что $\Psi(t) \in G(\Lambda), \Lambda = [1, +\infty]^n$.

Далее, $(\overline{D_r})^*, r \in |I^n|_+$ - полиэллипс с фокусами -1, 1. (см. примеры из § 2.2).

Он является n - звездной областью, т.е. $(\overline{D_r})^* \in \mathcal{U}_0(\Lambda), \Lambda = [1, +\infty]^n$. Отсюда $D_r \in \mathcal{U}_0(\Lambda)$ и $\Omega_r = (\overline{D_r})^*$.

Таким образом, $\mathcal{F} = \{\Omega_r : r \in |I^n|_+\}$ система всех возможных полиэллипсов с фокусами -1, 1 и теорема 2.5 в данном случае утверждает, что, если функция $f(z)$ голоморфна в любой n -эллиптической с фокусами -1, 1 области Ω из $\mathbb{C}^n$, то она разлагается, в сходящийся в этой области ряд, по полиномам $p_\alpha(z)$, заданным соотношением (2.21).

Пример 4. Следующие полиномы $p_\alpha(z)$ являются многомерным аналогом гипергеометрических полиномов или полиномов Якоби:

$$\begin{aligned} A(\omega) F_D^{(n)}(a; b_1, \dots, b_n; c; \frac{-4\omega_1 z_1}{(1 - \omega_1)^2}, \dots, \frac{-4\omega_n z_n}{(1 - \omega_n)^2}) = \\ = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(1 - 2z_1, \dots, 1 - 2z_n) \omega^n, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $a > 0$, $c > 0$, $b_k > 0$, $k = 1, \dots, n$, функция $A(\omega)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в предыдущих примерах.

Здесь отображение

$$\zeta_k = \frac{1}{b_k(\omega)} = \frac{(1 - \omega_k)^2}{-4\omega_k} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\omega_k + \frac{1}{\omega_k} \right) \right], \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому $\mathcal{F}$ - семейство всевозможных полиэллипсов с фокусами 0, 1.

Однако, учтя сдвиг переменных в формуле (2.22), мы приходим к тому же самому утверждению для полиномов $p_\alpha(z)$, что и в примере 3.

§ 2.4. Представление целых функций многих комплексных переменных рядами полиномов

Глава 2 монографии [35] посвящена разложению целых функций одной переменной в ряды полиномов (2.1). При этом предполагается, что функция $\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n$, участвующая в производящем соотношении (2.1), является так называемой функцией сравнения, т.е. удовлетворяет условиям

$$\Psi_n > 0, \quad \frac{\Psi_n}{\Psi_{n+1}} \leq \frac{\Psi_{n+1}}{\Psi_{n+2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi_n}{\Psi_{n+1}} = \infty.$$

Такая функция, очевидно, является целой. Она бралась в качестве эталона при оценке роста целых функций, вместо обычной для теории целых функций функции e^t .

Мы начнем с определения функции сравнения многих переменных. Функцию

$$\Psi(t) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \Psi_\alpha t^\alpha \quad (2.23)$$

назовем функцией сравнения, если существует такая выпуклая вниз функция $\mu : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, что $\lim_{\|\alpha\| \rightarrow \infty} \frac{\|\alpha\|}{\mu(\alpha)} = 0$ и $\Psi_\alpha = e^{-\mu(\alpha)}$ для всех α .

Известно, что функция в том и только в том случае будет выпуклой вниз, когда ее надграфик

$$\text{Ері } \mu = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R} : x_{n+1} \geq \mu(x_1, \dots, x_n)\}$$

является выпуклым множеством.

Из определения сразу следует, что функция сравнения (2.23) всегда целая и $\Psi_\alpha > 0$ для всех α . Кроме того она обладает следующим свойством.

Лемма 2.2. Каждый член степенного ряда $\Psi_\alpha t^\alpha$ функции сравнения (2.23) при некотором значении $t = r_\alpha = (r_{1,\alpha}, \dots, r_{n,\alpha}) \in \mathbb{R}_+^n$ становится максимальным, т.е. для каждого α существует такое z_α , что неравенство

$$\Psi_\beta z_\alpha^\beta \leq \Psi_\alpha z_\alpha^\alpha \quad (2.24)$$

имеет место для всех мультииндексов β .

Доказательство.

Пусть ряд (2.23) задает функцию сравнения $\Psi(t)$.

По определению, существует выпуклая вниз функция $\mu(x)$ такая, что $\Psi_\alpha = e^{-\mu(\alpha)}$ для всех α .

Зафиксируем некоторый мультииндекс α . Так как точка $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu(\alpha)) \in \partial(\text{Ері } \mu)$ и множество $\text{Ері } \mu$ выпукло, то существует опорная гиперплоскость к $\text{Ері } \mu$, проходящая через точку $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \mu(\alpha))$. Ее уравнение можно записать в виде

$$y - \mu(\alpha) = a_1(x - \alpha_1) + \cdots + a_n(x_n - \alpha_n),$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Поскольку все точки лежат не ниже этой гиперплоскости, то в частности, для точек $(\beta_1, \dots, \beta_n, \mu(\beta)) \in \text{Epi } \mu$ имеем неравенство

$$\mu(\beta) - \mu(\alpha) \geq a_1(\beta_1 - \alpha_1) + \cdots + a_n(\beta_n - \alpha_n).$$

Из него следует, что

$$e^{-\mu(\beta) + a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n} \leq e^{-\mu(\alpha) + a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n},$$

т.е.

$$\Psi_\beta(e^{a_1})^{\beta_1} \cdots (e^{a_n})^{\beta_n} \leq \Psi_\alpha(e^{a_1})^{\alpha_1} \cdots (e^{a_n})^{\alpha_n}.$$

Теперь, полагая $e^{a_k} = r_{k,\alpha}$, $k = 1, \dots, n$, доказываем формулу (2.24).

Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Пусть функция $\Psi(t)$, заданная рядом (2.23), является функцией сравнения, тогда для любого мультииндекса α найдется $x_\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ такое, что

$$\frac{\Psi(x_\alpha)}{\Psi_\alpha x_\alpha^\alpha} \leq e \cdot (\|\alpha\| + 1)^n.$$

Доказательство.

Зафиксируем α и, по лемме 2.2, найдем значение $t = r_\alpha$, при котором член $\Psi_\alpha t^\alpha$ становится максимальным.

Положим

$$x_\alpha = r_\alpha \frac{\|\alpha\|}{\|\alpha\| + 1}.$$

Тогда, используя неравенство (2.24), имеем

$$\begin{aligned}
\Psi(x_\alpha) &= \sum_{\|\beta\| \geq 0} \Psi_\beta x_\alpha^\beta = \sum_{\|\beta\| \geq 0} \Psi_\beta r_\alpha^\beta \left(\frac{\|\alpha\|}{\|\alpha\| + 1} \right)^{\|\beta\|} \leq \\
&\leq \sum_{\|\beta\| \geq 0} \Psi_\beta r_\alpha^\beta \left(\frac{\|\alpha\|}{\|\alpha\| + 1} \right)^{\|\beta\|} = \Psi_\alpha x_\alpha^\alpha \cdot \frac{\left(\frac{\|\alpha\|}{\|\alpha\| + 1} \right)^{-\|\alpha\|}}{\left(1 - \frac{\|\alpha\|}{\|\alpha\| + 1} \right)^n} = \\
&= \Psi_\alpha x_\alpha^\alpha (1 + \|\alpha\|)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{\|\alpha\|} \right)^{\|\alpha\|} \leq \Psi_\alpha x_\alpha^\alpha (1 + \|\alpha\|)^n \cdot e.
\end{aligned}$$

Лемма 2.3 доказана.

Рассмотрим теперь целую функцию $f(z)$, заданную всюду сходящимся в $\mathbb{C}^n$ разложением

$$f(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} f_\alpha z^\alpha. \quad (2.25)$$

Будем говорить, что целая функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_\Psi$ функций конечного Ψ -типа, если существует векторный параметр $\tau \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$|f(z)| \leq M \cdot \Psi(|z| \cdot \tau), \quad (2.26)$$

где $M > 0$ постоянная.

Числа $\tau_1, \dots, \tau_n$ назовем сопряженными Ψ -типами функции $f \in \mathcal{E}_\Psi$, если для них неравенство (2.26) выполняется с некоторой постоянной $M > 0$, однако для чисел $r_j \leq \tau_j, j = 1, \dots, n$, где хотя бы одно неравенство строгое, (2.26) уже не выполняется ни при какой постоянной $M > 0$.

Для фиксированной функции $f \in \mathcal{E}_\Psi$ обозначим через A_τ множество всевозможных $\tau \in \mathbb{R}_+^n$, для которых неравенство (2.26) имеет место. Часть границы A_τ , лежащую в R_+^n назовем поверхностью сопряженных

Ψ -типов целой функции $f(z)$. Функцию

$$F(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{f_\alpha}{\Psi_\alpha} \left(\frac{1}{z} \right)^{\alpha+1}, \quad \alpha + 1 = (\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_n + 1) \quad (2.27)$$

будем называть Ψ - ассоциируемой с $f(z)$.

Теорема 2.6. Поверхность сопряженных Ψ - типов целой функции $f(z) \in \mathcal{E}_\Psi$ совпадает с поверхностью сопряженных радиусов сходимости ряда (2.27).

Доказательство.

Пусть B область абсолютной сходимости ряда (2.27), тогда нам нужно доказать, что $\partial A_\tau = \partial |B|_+$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $A_\tau = |B|_+$.

Пусть сначала $\tau \in |B|_+$, тогда, как известно,

$$\overline{\lim}_{\|\alpha\| \rightarrow \infty} \|\alpha\| \sqrt{\frac{|f_\alpha|}{\Psi_\alpha} \left(\frac{1}{\tau} \right)^\alpha} \leq 1, \quad (2.28)$$

откуда

$$|f_\alpha| \leq M \Psi_\alpha (\tau_1 + \varepsilon)^{\alpha_1} \dots (\tau_n + \varepsilon)^{\alpha_n}$$

для любого $\varepsilon > 0$ и некоторой постоянной $M > 0$.

Далее

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{\|\alpha\| \geq 0} |f_\alpha| |z|^\alpha \leq M \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \Psi_\alpha |z|^\alpha (\tau_1 + \varepsilon)^{\alpha_1} \dots (\tau_n + \varepsilon)^{\alpha_n} = \\ &= M \Psi[(\tau_1 + \varepsilon)|z_1|, \dots, (\tau_n + \varepsilon)|z_n|]. \end{aligned}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем $\tau \in A_\tau$, т.е. $|B|_+ \subset A_\tau$. Для доказательства обратного утверждения пусть $\tau \in A_\tau$, тогда $|f(z)| \leq M \Psi(\tau|z|)$.

Пусть α - фиксировано. Найдя в соответствии с леммой 2.3 x_α , положим $x_\alpha = \tau y_\alpha$ и рассмотрим поликруг I_{y_α} . Применяя неравенство Коши

для функции $f(z)$ в этом поликруге, найдем

$$\frac{|f_\alpha|}{\Psi_\alpha} \leq \frac{M\Psi(\tau y_\alpha)}{\Psi_\alpha y_\alpha^\alpha} = M\tau^\alpha \frac{\Psi(x_\alpha)}{\Psi_\alpha x_\alpha^\alpha} \leq M\tau^\alpha (||\alpha|| + 1)^n \cdot e.$$

Отсюда следует неравенство (2.28), т.е. $\tau \in |B|_+$.

Теорема 2.6 доказана.

В частном случае $\Psi(t) = \exp(\sum_{k=1}^n t_k)$ класс $\mathcal{E}_\Psi$ совпадает с множеством целых функций экспоненциального типа и теорема 2.6 в этом случае хорошо известна [20].

Пусть $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ сопряженные Ψ -типы функции (2.25), тогда, по теореме 2.6, они являются сопряженными радиусами сходимости ряда (2.27), т.е. $F(z)$ голоморфна в области $\bar{I}'_\tau$.

Заметим теперь, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Psi(z\omega) F(\omega) d\omega, \quad (2.29)$$

где

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n, \Gamma_j : |\omega_j| = \tau_j + \varepsilon, \varepsilon > 0, j = 1, \dots, n, d\omega = d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_n.$$

Т.к. цикл Γ лежит в области равномерной сходимости рядов $F(\omega)$ и $\Psi(z\omega)$, то, подставляя эти ряды и почленно интегрируя, легко докажем (2.29).

Вместо цикла Γ в (2.29) мы можем взять любой, гомотопный ему в области голоморфности функции $F(z)$, цикл.

Таким образом, рост целой функции $f(z)$ определяется особенностями Ψ - ассоциируемой с ней функции $F(z)$.

Рассмотрим опять семейство полиномов, заданных производящим соотношением (2.2), однако теперь дополнительно предположим, что функция $\Psi(t)$ является функцией сравнения.

Пусть $D = b(\mathcal{R})$ - образ области $\mathcal{R}$ при отображении $\zeta = b(\omega)$.

По области D сконструируем класс функций, которые будут разлагаться в ряд полиномов $p_\alpha(z)$.

Будем говорить, что целая функция $f(z) \in \mathcal{E}_\Psi(D)$, если существует полициркуловой компакт $K = K_1 \times \cdots \times K_n$, содержащийся в области D , такой, что Ψ - ассоциируемая с ней функция $F(z)$ голоморфно продолжается в область K' .

Теорема 2.7. Если функция $f(z) \in \mathcal{E}_\Psi(D)$, то она может быть представлена всюду сходящимся в $\mathbb{C}^n$ рядом полиномов (2.2)

$$f(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} c_\alpha p_\alpha(z)$$

Доказательство.

Пусть $\omega = b^{-1}(\zeta)$ обратное отображение для $\zeta = b(\omega)$. Перепишем (2.2) в виде

$$\Psi(z \cdot \zeta) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_\alpha(z) \frac{[b^{-1}(\zeta)]^\alpha}{a[b^{-1}(\zeta)]} \quad (2.30)$$

Последний ряд сходится при $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times D$.

Т.к. $f(z) \in \mathcal{E}_\Psi(D)$, то, по определению, найдется компакт $K = K_1 \times \cdots \times K_n \subset D$, такой, что соответствующая ей функция $F(z)$ голоморфна в K' .

Без ограничения общности можно считать, что $0 \in K$. Поскольку $K \Subset D$, то существует полициркуловая область $U = U_1 \times \cdots \times U_n$, удовлетворяющая условию $K \Subset U \subset D$.

Теперь легко понять, что найдется цикл $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n \subset U$, каждая кривая Γ_j которого разделяет соответствующий компакт K_j и точку ∞ , $j = 1, \dots, n$.

Тогда для данной функции $f(z)$ имеет место интегральное представление (2.29).

Подставив в нее ряд (2.30) и почленно интегрируя, доказываем теорему 2.7.

Теорема 2.7 доказана.

В частном случае тождественного отображения $b(\omega)$ имеем $D = \mathcal{R}$ - область сходимости ряда $a(\omega) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha \omega^\alpha$, $\mathcal{E}_\Psi(D)$ - множество всех тех целых функций $f(z)$, для которых $\mathcal{R} \cap B_F \neq \emptyset$, где B_F область сходимости ряда (2.27) для Ψ -ассоциируемой с функцией $f(z)$ функции $F(z)$.

Сформулируем утверждение теоремы 2.7 в этом частном случае.

Следствие 2.2. Любая целая функция $f(z)$, удовлетворяющая условию $\mathcal{R} \cap B_F \neq \emptyset$, разлагается в ряд по полиномам (2.6), сходящийся всюду к ней в $\mathbb{C}^n$.

Замечание. Теорема 2.6 здесь является ключевой, ибо интегральное представление (2.29) и все последующие рассуждения стали возможны именно благодаря ей.

Более того, функция сравнения намеренно определялась таким образом, чтобы теорема 2.6 имела место.

Разумеется условия, налагаемые нами на функцию сравнения $\Psi(t)$, не являются необходимыми для справедливости теоремы 2.6 - они могут быть ослаблены.

В одномерном случае необходимые и достаточные условия установлены Винницким Б.В. [9].

В качестве примера рассмотрим двойной ряд Ньютона [31]

$$f(z, \omega) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{c_{mn}}{m!n!} z(z-1)\dots(z-m+1)\omega(\omega-1)\dots(\omega-n+1). \quad (2.31)$$

Полиномы Ньютона

$$p_{mn}(z, \omega) = \frac{z(z-1)\dots(z-m+1)\omega(\omega-1)\dots(\omega-n+1)}{m!n!}$$

могут быть заданы производящим соотношением:

$$e^{z\zeta_1 + \omega\zeta_2} = \sum_{m,n=0}^{\infty} p_{mn}(z, \omega) (e^{\zeta_1} - 1)^m (e^{\zeta_2} - 1)^n.$$

Здесь $b_1^{-1}(\zeta) = e^{\zeta_1} - 1$, $b_2^{-1}(\zeta) = e^{\zeta_2} - 1$.

Обозначим $D_j = \{\zeta_j \in \mathbb{C} : |e^{\zeta_j} - 1| < 1\}$, $j = 1, 2$. Отображение биголоморфно в области $D_1 \times D_2$.

Функция сравнения здесь $\Psi(t_1, t_2) = e^{t_1 + t_2}$.

По теореме 2.7 имеем: любая целая функция $f(z, \omega) \in \mathcal{E}_{\Psi}(D_1 \times D_2)$ разлагается в двойной ряд Ньютона (2.31) с коэффициентами

$$c_{mn} = (-1)^{m+n} \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^n (-1)^{k+\ell} \binom{m}{k} \binom{n}{\ell} f(k, \ell).$$

В частности, любая целая функция $f(z, \omega)$, у которой найдется пара сопряженных экспоненциальных типов (τ_1, τ_2) , таких что $\tau_1 < \ln 2$ и $\tau_2 < \ln 2$, разлагается в ряд (2.31).

Заметим, что если в теореме 2.7 $D = \mathbb{C}^n$, то $\mathcal{E}_{\Psi}(D) = \mathcal{E}_{\Psi}$, т.е. любая целая функция конечных Ψ -типов представляется рядом по полиномам (2.2).

Так, например, любая функция экспоненциального типа представляется рядом полиномов Эрмита $H_{mn}(z, \omega)$ или $G_{mn}(z, \omega)$ [6, стр. 270].

§ 2.5. Суммирование кратных полиномиальных разложений

Рассмотрим полиномы $p_{\alpha}(z)$, заданные с помощью производящей функции

$$A(\omega) \prod_{j=1}^n (1 - 2\omega_j z_j + \omega_j^2)^{-1} = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} p_{\alpha}(z) \omega^{\alpha}, \quad (2.32)$$

где функция $A(\omega)$ голоморфна в поликруге I^n и $A(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in I^n$. Они являются частным случаем многочленов примера 3 из § 2.3.

При $n=1$ и $A(\omega) \equiv 1$ они превращаются в многочлены Чебышева второго рода [5], поэтому их можно считать многомерным аналогом этих многочленов.

Теорема 2.5 в случае многочленов (2.32) дает нам следующее утверждение: если функция $f(z)$ голоморфна в какой-либо n -эллиптической области ω , то она разлагается в этой области в ряд по полиномам (2.32)

$$f(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} c_\alpha p_\alpha(z), \quad (2.33)$$

который сходится к ней в каждой точке области Ω и равномерно сходится на компактных подмножествах Ω .

Здесь мы исследуем область суммируемости разложения (2.33), введенным в § 1.4 методом.

Точнее говоря, в качестве суммы Миттаг-Леффлера ряда (2.33) возьмем выражение

$$S(z) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{c_\alpha p_\alpha(z)}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} \quad (2.34)$$

и опишем область, в которой имеет место равенство $f(z) = S(z)$.

Для этого распространим данное в работе [44] понятие гиперболической звезды Миттаг-Леффлера функции одной переменной, подобно тому как была определена в § 1.4 область N_f .

Гиперболическим лучом на плоскости $\mathbb{C}$ назовем любую из четырех частей гиперболы

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1-a^2} = 1, \ 0 < a < 1\},$$

$x \geq 0$ и $y \geq 0$, $x \geq 0$ и $y \leq 0$, $x \leq 0$ и $y \geq 0$, $x \leq 0$ и $y \leq 0$,

а также четыре луча:

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \geq 0\}, \{x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \leq 0\},$$

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : x \geq 1, y = 0\}, \{x + iy \in \mathbb{C} : x \leq -1, y = 0\}.$$

Из каждой точки интервала $(-1, 1)$ выходят по два гиперболических луча, а из точек -1 и 1 по одному.

Они заполняют всю плоскость $\mathbb{C}$, не пересекаясь друг с другом.

Гиперболически звездной областью на плоскости $\mathbb{C}$ назовем область, содержащую отрезок $[-1, 1]$ и имеющую в пересечении с любым гиперболическим лучом связное множество.

Пусть $\omega_1 \in \mathbb{C}$; через $T(\omega_1)$ обозначим кусок гиперболического луча, соединяющего точки ω_1 и ∞ .

Для $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$ обозначим

$$T(\omega) = T(\omega_1) \times \dots \times T(\omega_n).$$

Пусть, как и ранее, Δ_f обозначает множество особых точек функции $f(z)$, которую предположим голоморфной в некотором полиэллипсе.

Тогда область

$$H_f = \text{int}(\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{\omega \in \Delta_f} T(\omega))$$

назовем гиперболической звездой Миттаг-Леффлера функции $f(z)$.

Теорема 2.8. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой n -эллиптической области, тогда она разлагается в ряд (2.33), суммируемый методом (2.34) в гиперболической звезде Миттаг-Леффлера H_f , иначе говоря, для всех $z \in H_f$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{c_\alpha p_\alpha(z)}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} = f(z). \quad (2.35)$$

Доказательство.

Аналогично тому как это было сделано для области N_f (леммы 1.7 и 1.8) можно показать, что H_f представляет собой объединение гиперболических полизвезд, т.е. областей вида

$$H_1 \times \cdots \times H_n,$$

где каждая из H_k , $k = 1, \dots, n$ является гиперболически звездной областью в плоскости $\mathbb{C}$. Тем самым доказательство сводится к случаю когда H_f имеет вид (2.36).

Итак пусть $H_f = H_1 \times \cdots \times H_n$ и $K \subset H_f$ - любой компакт. Тогда найдется поликруговая область

$$D = D_1 \times \cdots \times D_n$$

такая, что $K \subset D \Subset H_f$ и каждая из D_k , $k = 1, \dots, n$, является гиперболически звездной областью на плоскости $\mathbb{C}$.

Перепишем (2.32) в виде

$$A(\omega) \cdot \prod_{j=1}^n (1 + \omega_j^2)^{-1} \left(1 - \frac{2\omega_j z_j}{1 + \omega_j^2} \right)^{-1} = \sum_{|\alpha| \geq 0} p_\alpha(z) \omega^\alpha. \quad (2.37)$$

Делая замену переменных $\zeta_j = \frac{1}{2}(\omega_j + \frac{1}{\omega_j})$, $j = 1, \dots, n$, приходим к ряду

$$\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z_j}{\zeta_j} \right)^{-1} = \sum_{|\alpha| \geq 0} p_\alpha(z) Q_\alpha(\zeta), \quad (2.38)$$

где

$$Q_\alpha(\zeta) = \frac{\prod_{j=1}^n \zeta_j \left(\zeta_j - \sqrt{\zeta_j^2 - 1} \right)^{\alpha_j + 1}}{A(\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 1}, \dots, \zeta_n - \sqrt{\zeta_n^2 - 1})}.$$

и всюду в выражении $Q_\alpha(\xi)$ подразумевается главное значение корня.

Образ области $\overline{D}'$ при отображении

$$(\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1^2 - 1}, \dots, \zeta_n - \sqrt{\zeta_n^2 - 1}),$$

обозначим через G (здесь, как и ранее, под корнем понимаем его главное значение).

Из свойств функции Жуковского следует, что G является полизвездой.

Теперь, рассматривая ряд (2.37) как степенной относительно ω , убеждаемся, что он суммируем методом (2.34) к своей сумме в полизвезде G , если

$$z \in \{z \in \mathbb{C}^n : z_j \neq \frac{1}{2}(\omega_j + \frac{1}{\omega_j}), j = 1, \dots, n, \forall \omega \in G\} = \overline{D}.$$

Но тогда разложение (2.38) суммируемо при $z \in \overline{D}, \zeta \in \overline{D}'$, т.е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{p_\alpha(z) \cdot Q_\alpha(\zeta)}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} = \prod_{j=1}^n (1 - \frac{z_j}{\zeta_j})^{-1}$$

при $(z, \zeta) \in \overline{D} \times \overline{D}'$.

Выберем цикл $\Gamma = \Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n$ так, чтобы $\Gamma \subset H_f \setminus \overline{D}$ и каждая из $\Gamma_k, k = 1, \dots, n$ была кусочно-гладкой жордановой замкнутой кривой в плоскости $\mathbb{C}$, разделяющей точки 0 и ∞ .

По интегральной формуле Коши для всех $z \in \overline{D}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} f(\zeta) \cdot \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z_j}{\zeta_j}\right)^{-1} \frac{d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\zeta_1 \dots \zeta_n} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} f(\zeta) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \frac{p_\alpha(z) \cdot Q_\alpha(\zeta)}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} \frac{d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\zeta_1 \dots \zeta_n} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\|\alpha\| \geq 0} \left(\frac{p_\alpha(z)}{\Gamma(\alpha_1 \lambda + 1) \dots \Gamma(\alpha_n \lambda + 1)} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} f(\zeta) Q_\alpha(\zeta) \frac{d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n}{\zeta_1 \dots \zeta_n} \right). \end{aligned}$$

стягивая Γ в область сходимости ряда (2.38), убеждаемся, что

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} f(\zeta) \cdot Q_\alpha(\zeta) \frac{d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n}{\zeta_1 \cdots \zeta_n},$$

ибо, по теореме 2.5, именно таковы коэффициенты разложения (2.33). В силу произвольности компакта $K \subset H_f$ теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Л.А., Лейнартас Е.К. Многомерная композиция Адамара и ядра Сеге//Сиб.мат.журн.-1983.- Т.24, №3.- С.3-10.
2. Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного: Учеб.пособие для вузов. - М.: Высш.шк., 1984. - 192 с.
3. Аракелян Н.У. Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов//Мат.сборн.-1984.- Т.124, №5. - С.24-44.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1: Пер. с англ. - 2-е изд. - М.: Наука, 1973. - 294с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2: Пер. с англ. - 2-е изд. - М.: Наука, 1974. - 295с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.3: Пер. с англ. - М.: Наука, 1967. - 300с.
7. Беляев В.А. О сходимости и абсолютной сходимости двойных рядов по полиномам//Сиб.мат.журн. - 1972. - Т.13, №3. - С.510-530.
8. Бибербах Л. Аналитическое продолжение: Пер. с нем. - М.: Наука, 1967. - 240с.
9. Винницкий Б.В. Об условиях сходимости последовательностей в некоторых пространствах аналитических функций// Укр.мат.журн. - 1982. Т.34, №6. - С.741-744.
10. Гурьянова К.Н. Об одном методе аналитического продолжения функции двух комплексных переменных//Мат.зап.Уральск. ун-т. - 1965. - Т.5, №2. - С.21-26.
11. Деревянченко Г.Д., Какичев В.А. О разложении целых функций двух переменных по аппелеподобным полиномам//Сб. трудов/ Моск.обл.пед.ин-т. - 1974. - Вып.4. - С.161-173.

12. Жижиашвили Л.В. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов// Успехи мат.наук. - 1973. - Т.28, №3. - С.65-119.
13. Иванов В.К. Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов //Мат.сборн. - 1959. - Т.47 (89), №1. С.3-16.
14. Какичев В.А., Деревянченко Г.Д. Определение и некоторые формальные свойства аппелеподобных полиномов двух переменных//Мат.анализ и теория функций. - М., 1973. - Вып. 2. - С.146-158.
15. Лейнартас Е.К. Об одном обобщении композиции Адамара на функции многих комплексных переменных//Сиб.мат.журн. - 1981. - Т.22, №4. С.218-221.
16. Лейнартас Е.К. Об одном обобщении произведения Адамара в $\mathbb{C}^n$ //Мат.заметки. - 1982. - Т.32, №4. С.477-482.
17. Мавроди Н.Н. Аналитическое продолжение степенных рядов// Докл.АН УССР. - 1986. - Сер.А, №4. С.17-19.
18. Мураев Э.Б. О приближении аналитических функций двух переменных полиномами в звезде Миттаг-Леффлера//Сиб.мат. журн. - 1984. - Т.25, №1. С.101-105.
19. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. - 688с.
20. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. - М.: Наука, 1971. - 430с.
21. Сеге Г. Ортогональные многочлены: М.: Физматгиз, 1962. - 500 с.
22. Сторчевая Г.Д. Отображение аппелеподобных полиномов с помощью дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. - 1982. - Т.241, №6. - С.57-59.

23. Суетин П.К. Ряды по многочленам Фабера. - М.: Наука, 1964. - 336 с.
24. Харди Г.Х. Расходящиеся ряды: Пер. с англ. - М.: ИЛ, 1951. - 504 с.
25. Цвиль М.М. Разложение голоморфных функций по R-полиномам Фабера двух переменных // Теория функций. Диф. уравнения и их приложения. - Элиста, 1976. - С.14-22.
26. Цвиль М.М. Двойные ряды Фабера // Укр. мат. журн. - 1981. - Т.33, №1. - С.128-132.
27. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. - М.: Наука, 1985. - 272 с.
28. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. I: Учеб. для ун-тов. - 3 изд. - М.: Наука, 1985. - 336 с.
29. Янушаускас А.И. Суммирование кратных степенных рядов // Докл. АН СССР. - 1978. - Т.243, №2. - С.287-290.
30. Янушаускас А.И. Композиция особенностей функции двух комплексных переменных // Диф. и интегр. уравнения. Краевые задачи. - Тбилиси, 1979. - С.293-303.
31. Янушаускас А.И. Двойные ряды. - Новосибирск: Наука, 1980. - 224 с.
32. Янушаускас А.И. Двойные ряды ортогональных многочленов // Лит. мат. сб. - 1983. - Т.23, №2. - С.213-216.
33. Яцун В.А. Аналитическое продолжение разложений по многочленам Якоби // Укр. мат. журн. - 1969. - Т.21, №4, С.511-521.
34. Agmon S. On the singularities of Taylor series with reciprocal coefficients // Pacif. J. Math. - 1952. - №2. - P. 431-453.

35. Boas R. P., Buck R. C. Polynomial expansions of analytic functions. - Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag, 1964. - 47 p.
36. Boychev G. S. B^1 -summability of series in Gegenbauer polynomials on boundaries of their regions of convergence // Doki. Bolg. AH. - 1986. - Vol 39, N2 - P. 17-18.
37. Cowling V. P., King J. P. On the Taylor and Lototski summability of series of Legendre polynomials // J. Analyze Math. - 1962. - N10. - P. 139-152.
38. Djoković D. Ž. A property of the Taylor expansions of a class of rational functions in several variables // J. Math. Analysis and appl. - 1978. - Vol. 66. - P. 679-685.
39. Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. - Chichester (Sussex): Horwood, 1976. - 312 p.
40. Garibotti C. R., Grinstein F. F. A summation procedure for expansions in orthogonal polynomials // Math. notae. - 1976. - Vol. 25. - P. 55-63.
41. Gawronski W., Trautner R. Verschärfung eines Satzes von Borel-Okada über Summierbarkeit von Potenzreihen // Period. math. hungar. - 1976. - Vol. 7, N3-4. - S. 201-211.
42. Hadamard J. Theoreme sur les series entieres // Acta math. - 1899. - Vol. 22. - P. 55-63.
43. Haustas M. L. J., Klarner D. A. The diagonal of double power series // Duke Math. J. - 1971. - Vol. 38, N2. - P. 229-235.
44. Yakimovski A. Analytic continuation and summability of series of Legendre polynomials // Quart. - 1964. - Vol 15. - P. 289-302.

45. Yakimovski A. Summability of Heine and Neuman series of Legendre polynomials // Canad. J. math. 1966. - Vol. 18. - P. 1261-1263.
46. Lorentz G. G. Bernstein polynomials. Toronto. - 1953. - 130 p.
47. Odoni R. W. K. On the norms of algebraic integers // Mathematica. - 1975. - Vol. 22. - P. 71-80.
48. Suola Y. Sur la comparaison des deux fonctions $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma a_n^{-1} z^n$ // C. R. Acad. Sci. (Paris). - 1927. - Vol. 185. - P. 100-101.
49. Suola Y. Sur les points singuliers des deux fonctions $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma a_n^{-1} z^n$ // Bull. Soc. Math. Fr. - 1928. - Vol. 56. - P. 39-49.
50. Zeller K., Beekmann V. Theorie der Limitierungsverfahren. - 2 Aufl. - Berlin u. a.: Springer Verlag. - 1970. - 314 S.
51. Гуляев Г. М. Разложение голоморфных функций многих комплексных переменных в ряды полиномов. - Новосибирск, 1984. - 23 с. - (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; №86).
52. Гуляев Г. М. Представление целых функций многих комплексных переменных рядами полиномов // Моделирование и оптимизация структурных систем/Межвузовский сб. - Барнаул: изд. Алтайск. ун-та, 1984. - С. 39-44.
53. Гуляев Г. М. Суммирование по Миттаг-Леффлеру некоторых кратных полиномиальных рядов/Алтайск. с.-х. ин-т. - Барнаул, 1987. - 10 с. - Деп. в ВИНТИ 05.02.87, № 823-B87.