Единое уравнение Фоккера–Планка–Уилера–ДеВитта: от боровских экстремумов к тёмной энергии через стохастическое квантование гравитации

Белоусов Е.А., ЗАО «СОЛАР ЛС», г.Минск, Республика Беларусь, ведущий инженер-исследователь
e-mail: laser2@solar-laser.com

Аннотация

В настоящей работе предлагается обобщающее уравнение, объединяющее три, казалось бы, независимых физических конструкции: (1) дискретный спектр боровских уровней атома водорода, порождаемый условиями экстремума непрерывного распределения вероятностей; (2) стохастическое описание гравитационного поля в суперпространстве через уравнение Фоккера–Планка; (3) скалярное поле, компенсирующее диффузионное нарушение сохранения энергии-импульса и отождествляемое с тёмной энергией. Центральным результатом является функциональное уравнение (25)–(28), в котором генератор Фоккера–Планка одновременно выступает оператором сдвига по стохастическому времени, оператором «считывания» дискретного спектра из эрмитовой интерполяции и источником скалярного поля. Показано, что аналитическое продолжение $\tau \to -it$ воспроизводит уравнение Уилера–ДеВитта как равновесный предел. Во втором разделе работы сделана попытка решить полученное обобщенное уравнение.

Раздел 1. Вывод обобщающего уравнения Фоккера–Планка–Уилера–ДеВитта

1. Введение

1.1 Историческая мотивация

Модель Бора (1913) впервые установила дискретность атомных энергетических уровней через условие квантования момента импульса:

$L=n\hbar$, n=1,2,3,…

Это условие приводит к радиусам орбит:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} n^2 = a_0 n^2$$

и энергиям:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}6\ \text{эВ}}{n^2}$$

Последующее развитие квантовой механики заменило «орбиты» вероятностным описанием волновой функции, однако вопрос о происхождении дискретности остаётся центральным.

Параллельно развитие стохастического квантования (Parisi–Wu, 1981) показало, что квантовую теорию поля можно рассматривать как равновесный предел классического стохастического процесса во вспомогательном (фиктивном) времени τ. Уравнение Фоккера–Планка описывает эволюцию распределения вероятностей в этом времени, а его равновесное решение воспроизводит евклидов функциональный интеграл.

Стохастическая гравитация (Moffat, 1996) применила аналогичный формализм к метрике пространства-времени, рассматривая её как стохастическую переменную. Возникла естественная гипотеза: **может ли один и тот же математический объект — генератор Фоккера–Планка — одновременно порождать дискретный спектр боровского типа и описывать стохастическую динамику гравитационного поля?**

1.2 Постановка задачи

Цель настоящей работы — построить единое функциональное уравнение, которое:

1. Имеет равновесные решения с дискретным набором экстремумов, совпадающим с боровскими уровнями $E_n=-C/n^2$;
2. В пределе большой размерности переходит в уравнение Фоккера–Планка для гравитационного поля в суперпространстве;
3. Допускает аналитическое продолжение в уравнение Уилера–ДеВитта;

4. Естественным образом вводит скалярное поле как компенсатор диффузионного несохранения, отождествляемое с тёмной энергией.

2. Математический аппарат

2.1 Уравнение Фоккера–Планка в конечномерном пространстве

Рассмотрим вероятность P(X,τ), эволюционирующую в стохастическом времени τ, где X∈R — конфигурационная переменная. Уравнение Фоккера–Планка имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \hat{H}_{\mathrm{FP}} P = -\partial_X (A(X)P) + \frac{1}{2}\partial_X^2 (B(X)P) \qquad (1)$$

где A(X) — член сноса, B(X) — член диффузии. В стохастическом квантовании средние физических наблюдаемых определяются пределом:

$$P[\phi,\tau] \xrightarrow{\tau\to\infty} \frac{e^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]}} \qquad (2)$$

2.2 Стационарное условие и подстановка $P_{eq}=e^{-\Phi}$

Равновесное решение P_{eq} удовлетворяет $H^{\wedge}_{FP}P_{eq}=0$:

$$-\partial_X (AP_{\mathrm{eq}}) + \frac{1}{2}\partial_X^2 (BP_{\mathrm{eq}}) = 0 \qquad (3)$$

Раскроем производные первого и второго порядка. Обозначим $P \equiv P_{eq}$. Тогда:

$$\partial_X (AP) = A'P + AP'$$

$$\partial_X^2 (BP) = \partial_X (B'P + BP') = B''P + 2B'P' + BP''$$

Подставляя в (3):

$$-A'P - AP' + \frac{1}{2}\left(B''P + 2B'P' + BP''\right) = 0 \qquad (4)$$

Перегруппируем члены:

$$\frac{B}{2}P'' + \left(B' - A\right)P' + \left(\frac{B''}{2} - A'\right)P = 0 \qquad (5)$$

Подстановка $P = e^{-\Phi}$ даёт:

$$P' = -\Phi' e^{-\Phi} = -\Phi' P$$

$$P'' = \left(\Phi'^2 - \Phi''\right) e^{-\Phi} = \left(\Phi'^2 - \Phi''\right) P$$

Подставляя в (5) и сокращая на P:

$$\frac{B}{2}\left(\Phi'^2 - \Phi''\right) - \left(B' - A\right)\Phi' + \frac{B''}{2} - A' = 0 \tag{6}$$

Раскроем скобки:

$$\frac{B}{2}\Phi'^2 - \frac{B}{2}\Phi'' - B'\Phi' + A\Phi' + \frac{B''}{2} - A' = 0 \tag{7}$$

Перепишем в виде линейного уравнения относительно A:

$$A' + \Phi' A = \frac{B}{2}\Phi'^2 - \frac{B}{2}\Phi'' - B'\Phi' + \frac{B''}{2} \tag{8}$$

Это **линейное ОДУ первого порядка** относительно $A(X)$ при заданных $B(X)$ и $\Phi(X)$.

2.3 Случай постоянной диффузии B=2D

При $B = \text{const} = 2D$ имеем $B' = 0$, $B'' = 0$, и уравнение (8) упрощается:

$$A' + \Phi' A = D\left(\Phi'^2 - \Phi''\right) \tag{9}$$

Интегрирующий множитель: $\mu(X) = \exp\left(\int^X \Phi'(y)dy\right) = e^{\Phi(X)}$. Умножаем обе части (9) на e^{Φ}:

$$\frac{d}{dX}\left(Ae^{\Phi}\right) = De^{\Phi}\left(\Phi'^2 - \Phi''\right) \tag{10}$$

Интегрируем:

$$A(X) = e^{-\Phi(X)}\left[C_0 + D\int^X e^{\Phi(y)}\left(\Phi'(y)^2 - \Phi''(y)\right)dy\right] \tag{11}$$

Вычислим интеграл в (11). Заметим тождество:

$$e^{\Phi}\left(\Phi'^2 - \Phi''\right) = \frac{d}{dX}\left(\Phi' e^{\Phi}\right) - 2\Phi'^2 e^{\Phi} \tag{12}$$

Действительно:

$$\frac{d}{dX}\left(\Phi' e^{\Phi}\right) = \Phi'' e^{\Phi} + \Phi'^2 e^{\Phi}$$

Тогда:

$$\frac{d}{dX}\left(\Phi' e^{\Phi}\right) - 2\Phi'^2 e^{\Phi} = \Phi'' e^{\Phi} + \Phi'^2 e^{\Phi} - 2\Phi'^2 e^{\Phi} = e^{\Phi}(\Phi'' - \Phi'^2)$$

Что совпадает с (12) с точностью до знака. Уточним:

$$e^{\Phi}(\Phi'^2 - \Phi'') = \frac{d}{dX}\left(\Phi' e^{\Phi}\right) - 2\Phi'' e^{\Phi} - \Phi'^2 e^{\Phi} + \Phi'^2 e^{\Phi} = \frac{d}{dX}\left(\Phi' e^{\Phi}\right) - 2\Phi'' e^{\Phi}$$

2.4. Частный случай: гармонический потенциал (процесс Орнштейна–Уленбека)

Пусть $\Phi(X) = \frac{\alpha}{2}(X - X_n)^2$. Тогда:

$$\Phi' = \alpha(X - X_n), \qquad \Phi'' = \alpha, \qquad \Phi'^2 = \alpha^2(X - X_n)^2$$

Подставляем в (9):

$$A' + \alpha(X - X_n)A = D\left(\alpha^2(X - X_n)^2 - \alpha\right) \tag{13}$$

Интегрирующий множитель:

$$\mu(X) = \exp\left(\frac{\alpha}{2}(X - X_n)^2\right)$$

Умножаем:

$$\frac{d}{dX}\left(Ae^{\alpha(X-X_n)^2/2}\right) = De^{\alpha(X-X_n)^2/2}\left(\alpha^2(X - X_n)^2 - \alpha\right)$$

Вычислим правую часть. Заметим:

$$\frac{d}{dX}\left[\alpha(X - X_n)e^{\alpha(X-X_n)^2/2}\right] = \alpha e^{\alpha(X-X_n)^2/2} + \alpha^2(X - X_n)^2 e^{\alpha(X-X_n)^2/2}$$

$$= e^{\alpha(X-X_n)^2/2}\left(\alpha + \alpha^2(X - X_n)^2\right)$$

Тогда:

$$De^{\alpha(X-X_n)^2/2}\left(\alpha^2(X - X_n)^2 - \alpha\right) = D\frac{d}{dX}\left[\alpha(X - X_n)e^{\alpha(X-X_n)^2/2}\right] - 2D\alpha e^{\alpha(X-X_n)^2/2}$$

Интегрируем:

$$Ae^{\alpha(X-X_n)^2/2} = D\alpha(X - X_n)e^{\alpha(X-X_n)^2/2} - 2D\alpha\int^X e^{\alpha(y-X_n)^2/2}dy + C_0$$

Следовательно:

$$A(X) = D\alpha(X - X_n) - 2D\alpha e^{-\alpha(X-X_n)^2/2} \int^X e^{\alpha(y-X_n)^2/2} dy + C_0 e^{-\alpha(X-X_n)^2/2} \quad (14)$$

При $C_0 = 0$ и вблизи $X \approx X_n$ интеграл мал, и:

$$A(X) \approx D\alpha(X - X_n) \quad (15)$$

Это стандартный процесс Орнштейна–Уленбека с гауссовым равновесием:

$$P_{\text{eq}}(X) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi D}} \exp\left(-\frac{\alpha(X - X_n)^2}{2D}\right) \quad (16)$$

с максимумом в X_n.

2.5 Глобальное обобщение: эрмитова интерполяция

Для получения **всех** боровских экстремумов одновременно зададим $\Phi(X)$ как эрмитов интерполянт. Для узлов $X_1 < X_2 < \cdots < X_N$ определим базисные полиномы $h_n(X)$ степени $2N - 1$, удовлетворяющие:

$$h_n(X_m) = \delta_{nm}, \qquad h_n'(X_m) = 0 \quad (17)$$

Явное построение: пусть

$$\ell_n(X) = \prod_{m \neq n} \frac{X - X_m}{X_n - X_m}$$

— базисные полиномы Лагранжа. Тогда:

$$h_n(X) = [1 - 2\ell_n'(X_n)(X - X_n)]\, \ell_n(X)^2 \quad (18)$$

$$\tilde{h}_n(X) = (X - X_n)\ell_n(X)^2 \quad (19)$$

Удовлетворяют условиям:

$$h_n(X_m) = \delta_{nm}, \qquad h_n'(X_m) = 0$$

$$\tilde{h}_n(X_m) = 0, \qquad \tilde{h}_n'(X_m) = \delta_{nm}$$

удовлетворяют условиям:

$$h_n(X_m) = \delta_{nm}, \qquad h_n'(X_m) = 0$$

$$\tilde{h}_n(X_m) = 0, \qquad \tilde{h}_n'(X_m) = \delta_{nm}$$

Тогда эрмитов интерполянт:

$$\Phi(X) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n h_n(X) + \sum_{n=1}^{N} \Phi'_n \tilde{h}_n(X) \tag{20}$$

При $\Phi'_n = 0$ (все производные в узлах равны нулю):

$$\Phi(X) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n h_n(X), \qquad \Phi_n = \frac{C}{Tn^2} \tag{21}$$

Автоматически $\Phi'(X_m) = 0$ для всех m, что даёт экстремумы в боровских радиусах $X_n = a_0 n^2$.

Подставляя (21) в (9), получаем уравнение для $A(X)$:

$$A' + \left(\sum_n \Phi_n h'_n\right) A = D\left(\left(\sum_n \Phi_n h'_n\right)^2 - \sum_n \Phi_n h''_n\right) \tag{22}$$

Решение:

$$A(X) = e^{-\Phi(X)}\left[C_0 + D\int^X e^{\Phi(y)}\left(\Phi'(y)^2 - \Phi''(y)\right) dy\right] \tag{23}$$

3. Обобщение на суперпространство

3.1 Замена переменных

Перейдём от $X \in \mathbb{R}$ к трёхмерной геометрии $g_{ij}(x)$. Замены:

$$X \to g_{ij}, \qquad \partial_X \to \frac{\delta}{\delta g_{ij}}, \qquad A(X) \to \mathcal{D}^{ij}_{\mathrm{GR}}[g], \qquad B \to \ell_P^2 \mathcal{G}^{ijkl} \tag{24}$$

где $\mathcal{G}_{ijkl}$ — суперметрика ДеВитта:

$$\mathcal{G}_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk} - g_{ij}g_{kl}\right) \tag{25}$$

3.2 Функциональное уравнение

Аналог уравнения (8):

$$\frac{\delta \mathcal{D}^{ij}}{\delta g_{ij}} + \mathcal{D}^{ij}\frac{\delta \Phi}{\delta g_{ij}} = \frac{\ell_P^2}{2}\mathcal{G}^{ijkl}\left(\frac{\delta \Phi}{\delta g_{ij}}\frac{\delta \Phi}{\delta g_{kl}} - \frac{\delta^2 \Phi}{\delta g_{ij}\delta g_{kl}}\right) \tag{26}$$

Решение:

$$\mathcal{D}^{ij}_{\mathrm{GR}}[g] = e^{-\Phi[g]}\left[\mathcal{C}_0^{ij} + \frac{\ell_P^2}{2}\int \mathcal{D}g'\, e^{\Phi[g']}\mathcal{G}^{ijkl}\left(\frac{\delta\Phi}{\delta g'_{ij}}\frac{\delta\Phi}{\delta g'_{kl}} - \frac{\delta^2\Phi}{\delta g'_{ij}\delta g'_{kl}}\right)\right] \tag{27}$$

3.3 Эрмитова интерполяция в суперпространстве

Зададим функционал $\Phi[g]$ как эрмитов интерполянт:

$$\Phi[g] = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n h_n[g], \qquad \Phi_n = \frac{C}{Tn^2} \tag{28}$$

где базисные функционалы $h_n[g]$ удовлетворяют:

$$h_n[g_m] = \delta_{nm}, \qquad \left.\frac{\delta h_n}{\delta g_{ij}}\right|_{g=g_m} = 0 \tag{29}$$

Здесь g_m — дискретные геометрические конфигурации, соответствующие «гравитационным боровским орбитам».

4. Обобщающее уравнение

4.1 Основное уравнение

Собирая всё вместе, получаем **обобщающее уравнение**:

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\delta}{\delta g_{ij}}\left(\mathcal{D}^{ij}_{\mathrm{GR}}[g]P\right) + \frac{\ell_P^2}{2}\mathcal{G}^{ijkl}\frac{\delta^2 P}{\delta g_{ij}\delta g_{kl}}} \tag{30}$$

где $\mathcal{D}^{ij}_{\mathrm{GR}}[g]$ определяется из (27), а $\Phi[g]$ — из (28)–(29).

4.2 Предельные случаи

Случай 1: одномерный, один экстремум. Уравнение (30) сводится к (1) с $A = D\alpha(X - X_n)$, что даёт процесс Орнштейна–Уленбека с решением (16).

Случай 2: $\ell_P \to 0$ (отсутствие диффузии). Уравнение (30) становится детерминированным:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\delta}{\delta g_{ij}}\left(\mathcal{D}^{ij}_{\mathrm{GR}}P\right) \tag{31}$$

Это уравнение Лиувилля для гравитационного поля.

Случай 3: аналитическое продолжение $\tau \to -it$. Уравнение (30) переходит в:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2}\mathcal{G}^{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta g_{ij}\delta g_{kl}} + V[g]\right]\Psi \tag{32}$$

При $\partial_t\Psi = 0$ получаем уравнение Уилера–ДеВитта:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\mathcal{G}^{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta g_{ij}\delta g_{kl}} + V[g]\right]\Psi = 0 \tag{33}$$

5. Скалярное поле как компенсатор диффузии

5.1 Нарушение сохранения

Диффузионный член в (30) нарушает ковариантное сохранение тензора энергии-импульса:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \sigma J^\nu \neq 0 \tag{34}$$

где J^ν — поток, порождённый диффузией, σ — коэффициент.

5.2 Введение скалярного поля

Вводим скалярное поле ϕ для компенсации:

$$\nabla_\mu \phi = -\kappa\sigma J_\mu \tag{35}$$

Модифицированные уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \phi g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{36}$$

5.3 Космологическое отождествление

В пространственно-плоской метрике Робертсона–Уокера:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2 \tag{37}$$

Уравнение эволюции ϕ:

$$\dot{\phi} = -3H(\phi + p_\phi) \tag{38}$$

где p_ϕ определяется формой диффузионного потока. Поле ϕ одновременно играет **двойную роль:** тёмной энергии и поля компенсации диффузии.

5.4 Связь с наблюдаемой тёмной энергией

При $\sigma = 0$ поле ϕ вырождается в космологическую постоянную:

$$\phi \to \Lambda \tag{39}$$

При $\sigma > 0$ возникает динамическое скалярное поле с уравнением состояния:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} \tag{40}$$

Наблюдательные ограничения на w_ϕ ($w_\phi \approx -1$ с точностью $\sim 5\%$) накладывают ограничения на коэффициент диффузии σ.

Раздел 2. Попытка решения обобщающего уравнения Фоккера–Планка–Уилера–ДеВитта

Постановка

Мы имеем обобщённое уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{\delta}{\delta g_{ij}} \left(\mathcal{D}^{ij}_{\mathrm{GR}}[g] P \right) + \frac{\ell_P^2}{2} \mathcal{G}^{ijkl} \frac{\delta^2 P}{\delta g_{ij} \delta g_{kl}} \tag{1}$$

Точное решение в полном суперпространстве невозможно. Поэтому решим его **поэтапно**, начиная с одномерной модели, затем переходя к мини-суперпространству.

Часть I. Одномерная модель (конечномерная)

1.1 Постановка

Уравнение (1) в одном измерении:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\partial_X (A(X) P) + D \partial_X^2 P \tag{2}$$

где $D = B/2$, а $A(X)$ определяется из (8) предыдущей статьи:

$$A' + \Phi' A = D(\Phi'^2 - \Phi'') \tag{3}$$

1.2 Метод решения: преобразование Лиувилля

Введём подстановку:

$$P(X, \tau) = e^{-\Phi(X)/2} \, \psi(X, \tau) \tag{4}$$

Тогда:

$$\partial_X P = e^{-\Phi/2}\left(-\frac{\Phi'}{2}\psi + \psi'\right)$$

$$\partial_X^2 P = e^{-\Phi/2}\left(\frac{\Phi'^2}{4}\psi - \frac{\Phi''}{2}\psi - \Phi'\psi' + \psi''\right)$$

Подставляем в (2):

$$e^{-\Phi/2}\partial_\tau \psi = -\partial_X\left[Ae^{-\Phi/2}\psi\right] + De^{-\Phi/2}\left(\frac{\Phi'^2}{4}\psi - \frac{\Phi''}{2}\psi - \Phi'\psi' + \psi''\right)$$

Раскрываем первый член:

$$\partial_X\left[Ae^{-\Phi/2}\psi\right] = e^{-\Phi/2}\left[A'\psi + A\psi' - \frac{A\Phi'}{2}\psi\right]$$

Сокращаем на $e^{-\Phi/2}$:

$$\partial_\tau \psi = -A'\psi - A\psi' + \frac{A\Phi'}{2}\psi + D\left(\frac{\Phi'^2}{4}\psi - \frac{\Phi''}{2}\psi - \Phi'\psi' + \psi''\right) \tag{5}$$

1.3 Выбор $A(X)$ для упрощения

Используем уравнение (3) для исключения A':

$$A' = D(\Phi'^2 - \Phi'') - \Phi' A$$

Подставляем в (5):

$$\partial_\tau \psi = -\left[D(\Phi'^2 - \Phi'') - \Phi' A\right]\psi - A\psi' + \frac{A\Phi'}{2}\psi + D\left(\frac{\Phi'^2}{4}\psi - \frac{\Phi''}{2}\psi - \Phi'\psi' + \psi''\right)$$

Группируем члены:

$$\partial_\tau \psi = D\psi'' - \left(A + D\Phi'\right)\psi' + \left[-D\Phi'^2 + D\Phi'' + \Phi' A + \frac{A\Phi'}{2} + \frac{D\Phi'^2}{4} - \frac{D\Phi''}{2}\right]\psi$$

Упрощаем коэффициент при ψ:

$$-D\Phi'^2 + \frac{D\Phi'^2}{4} = -\frac{3D\Phi'^2}{4}$$

$$D\Phi'' - \frac{D\Phi''}{2} = \frac{D\Phi''}{2}$$

$$\Phi' A + \frac{A\Phi'}{2} = \frac{3A\Phi'}{2}$$

Итого:

$$\partial_\tau \psi = D\psi'' - (A + D\Phi')\,\psi' + \left[-\frac{3D\Phi'^2}{4} + \frac{D\Phi''}{2} + \frac{3A\Phi'}{2}\right]\psi \tag{6}$$

1.4 Специальный выбор A: сокращение первой производной

Потребуем, чтобы коэффициент при ψ' обратился в нуль:

$$A + D\Phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -D\Phi' \tag{7}$$

Проверка: подставляем $A = -D\Phi'$ в (3):

$$A' + \Phi' A = -D\Phi'' - D\Phi'^2$$

Правая часть (3): $D(\Phi'^2 - \Phi'')$. Приравниваем:

$$-D\Phi'' - D\Phi'^2 = D\Phi'^2 - D\Phi''$$

$$-D\Phi'^2 = D\Phi'^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi' = 0$$

Это означает, что $A = -D\Phi'$ является решением уравнения (3) **только при** $\Phi' = 0$, то есть в точках экстремума. В общем случае это не решение.

1.5 Альтернативный подход: точное решение для гармонического Φ

Пусть $\Phi(X) = \frac{\alpha}{2}X^2$. Тогда:

$$\Phi' = \alpha X, \qquad \Phi'' = \alpha, \qquad \Phi'^2 = \alpha^2 X^2$$

Уравнение (3):

$$A' + \alpha X A = D(\alpha^2 X^2 - \alpha) \tag{8}$$

Решение (найдено ранее):

$$A(X) = D\alpha X + C_0 e^{-\alpha X^2/2} \tag{9}$$

При $C_0 = 0$: $A = D\alpha X$. Подставляем в (2):

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\partial_X(D\alpha X P) + D\partial_X^2 P \tag{10}$$

Это **уравнение Орнштейна–Уленбека**. Его решение:

$$P(X,\tau) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi D(1-e^{-2\alpha\tau})}}\exp\left[-\frac{\alpha(X-X_0e^{-\alpha\tau})^2}{2D(1-e^{-2\alpha\tau})}\right] \tag{11}$$

При $\tau \to \infty$:

$$P_{\text{eq}}(X) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi D}}\exp\left(-\frac{\alpha X^2}{2D}\right) \tag{12}$$

Максимум при $X = 0$ (боровский радиус $X_1 = 0$ в этой параметризации).

1.6 Обобщение на несколько экстремумов

Для N экстремумов используем эрмитов интерполянт:

$$\Phi(X) = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n h_n(X), \qquad \Phi_n = \frac{C}{Tn^2} \tag{13}$$

Уравнение (3) становится:

$$A' + \left(\sum_n \Phi_n h_n'\right) A = D\left(\left(\sum_n \Phi_n h_n'\right)^2 - \sum_n \Phi_n h_n''\right) \tag{14}$$

Это линейное ОДУ с полиномиальными коэффициентами. Решение:

$$A(X) = e^{-\Phi(X)}\left[C_0 + D\int^X e^{\Phi(y)}\left(\Phi'(y)^2 - \Phi''(y)\right)dy\right] \tag{15}$$

Точное вычисление интеграла возможно, если $\Phi(X)$ — полином. Для эрмитова интерполянта степени $2N-1$ интеграл берётся в замкнутой форме, но выражение громоздко.

Часть II. Мини-суперпространство (космологическая модель)

2.1 Постановка

Рассмотрим однородную и изотропную Вселенную. Метрика:

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2 \tag{16}$$

Единственная динамическая переменная — масштабный фактор a. Суперпространство сводится к **мини-суперпространству** с координатой a.

Уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\partial_a \left(\mathcal{D}(a) P \right) + \frac{\ell_P^2}{2} \mathcal{G}(a) \partial_a^2 P \tag{17}$$

где $\mathcal{G}(a)$ — компонента суперметрики ДеВитта.

2.2 Явный вид метрики

Для метрики (16) суперметрика ДеВитта:

$$\mathcal{G}_{aaaa} = -\frac{a}{2} \tag{18}$$

(знак минус — сигнатура суперпространства). Тогда уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\partial_a \left(\mathcal{D}(a) P \right) - \frac{\ell_P^2}{4} a \partial_a^2 P \tag{19}$$

2.3 Стационарное решение

Полагаем $\partial_\tau P = 0$:

$$-\partial_a \left(\mathcal{D} P \right) - \frac{\ell_P^2}{4} \partial_a \left(a \partial_a P \right) = 0 \tag{20}$$

Интегрируем один раз:

$$-\mathcal{D} P - \frac{\ell_P^2}{4} a \partial_a P = C_1 \tag{21}$$

При $C_1 = 0$ (граничные условия):

$$\frac{\partial_a P}{P} = -\frac{4\mathcal{D}}{\ell_P^2 a} \tag{22}$$

Решение:

$$P_{\text{eq}}(a) = P_0 \exp\left(-\frac{4}{\ell_P^2} \int^a \frac{\mathcal{D}(a')}{a'} da' \right) \tag{23}$$

2.4 Выбор $\mathcal{D}(a)$ для боровских экстремумов

Потребуем, чтобы $P_{\text{eq}}(a)$ имела экстремумы в точках $a_n = a_0 n^2$. Тогда:

$$\Phi(a) = \frac{4}{\ell_P^2} \int^a \frac{\mathcal{D}(a')}{a'} da' \tag{24}$$

должна быть эрмитовым интерполянтом с $\Phi'(a_n) = 0$. Это даёт:

$$\mathcal{D}(a) = \frac{\ell_P^2}{4} a \Phi'(a) \tag{25}$$

Подставляем в (19):

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = -\partial_a \left(\frac{\ell_P^2}{4} a \Phi'(a) P \right) - \frac{\ell_P^2}{4} a \partial_a^2 P \tag{26}$$

2.5 Решение нестационарного уравнения

Введём замену:

$$P(a, \tau) = e^{-\Phi(a)/2} \psi(a, \tau) \tag{27}$$

Подставляем в (26). После сокращения на $e^{-\Phi/2}$:

$$\partial_\tau \psi = -\frac{\ell_P^2}{4} a \psi'' - \frac{\ell_P^2}{4} \left(\Phi' + a\Phi'' + 1 \right) \psi' + V(a) \psi \tag{28}$$

где потенциал:

$$V(a) = -\frac{\ell_P^2}{4} \left[a \frac{\Phi'^2}{4} - a \frac{\Phi''}{2} - \Phi' - a\Phi'' + \frac{a\Phi'^2}{2} \right]$$

Упрощаем:

$$V(a) = -\frac{\ell_P^2}{4} \left[\frac{3a\Phi'^2}{4} - \frac{3a\Phi''}{2} - \Phi' \right] \tag{29}$$

2.6 Разделение переменных

Ищем решение в виде:

$$\psi(a, \tau) = \sum_k c_k e^{-\lambda_k \tau} \psi_k(a) \tag{30}$$

где ψ_k — собственные функции:

$$-\frac{\ell_P^2}{4} a \psi_k'' - \frac{\ell_P^2}{4} \left(\Phi' + a\Phi'' + 1 \right) \psi_k' + V(a) \psi_k = -\lambda_k \psi_k \tag{31}$$

2.7 Приближение вблизи экстремума

Вблизи $a = a_n$ разложим $\Phi(a)$:

$$\Phi(a) \approx \Phi_n + \frac{\alpha_n}{2}(a - a_n)^2 + O((a - a_n)^3) \tag{32}$$

Тогда $\Phi' \approx \alpha_n(a - a_n)$, $\Phi'' \approx \alpha_n$, и уравнение (31) вблизи a_n принимает вид:

$$-\frac{\ell_P^2 a_n}{4}\psi_k'' - \frac{\ell_P^2}{4}\left[\alpha_n(a - a_n) + a_n\alpha_n + 1\right]\psi_k' + V_n\psi_k = -\lambda_k\psi_k \tag{33}$$

Это уравнение типа **осциллятора с линейным трением.** Его решения — функции Эрмита с собственными значениями:

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{\ell_P^2\alpha_n}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right) \tag{34}$$

2.8 Глобальное решение

Собирая локальные решения:

$$P(a, \tau) = \sum_n \sum_k c_{nk} e^{-\lambda_k^{(n)}\tau} e^{-\Phi(a)/2}\psi_k^{(n)}(a) \tag{35}$$

При $\tau \to \infty$ выживает только основное состояние $k = 0$:

$$P_{\text{eq}}(a) \approx \sum_n c_{n0} e^{-\Phi(a)/2}\psi_0^{(n)}(a) \tag{36}$$

Каждое слагаемое имеет максимум в $a_n = a_0 n^2$.

Часть III. Полное суперпространство: формальное решение

3.1 Функциональный аналог

В полном суперпространстве решение уравнения (1) формально записывается через **функциональный интеграл**:

$$P[g, \tau] = \int \mathcal{D}g_0\, K[g, \tau; g_0, 0] P[g_0, 0] \tag{37}$$

где ядро K удовлетворяет уравнению (1) с начальным условием $K[g, 0; g_0, 0] = \delta[g - g_0]$.

3.2 Представление через собственные функционалы

Разложим P по собственным функционалам генератора Фоккера–Планка:

$$\hat{H}_{\mathrm{FP}}\Psi_n[g] = \lambda_n \Psi_n[g] \tag{38}$$

Тогда:

$$P[g,\tau] = \sum_n c_n e^{-\lambda_n \tau}\Psi_n[g] \tag{39}$$

Равновесное распределение:

$$P_{\mathrm{eq}}[g] = \Psi_0[g], \qquad \lambda_0 = 0 \tag{40}$$

3.3 Связь с боровским спектром

Если $\Psi_0[g] = e^{-\Phi[g]}$, а $\Phi[g]$ — эрмитов интерполянт с экстремумами в g_n, то:

$$\left.\frac{\delta \Phi}{\delta g_{ij}}\right|_{g=g_n} = 0 \tag{41}$$

Это даёт дискретный набор геометрических конфигураций g_n, соответствующих «гравитационным боровским орбитам».

3.4 Аналитическое продолжение

При $\tau \to -it$ уравнение (1) переходит в:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi \tag{42}$$

где:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\mathcal{G}^{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta g_{ij}\delta g_{kl}} + V[g] \tag{43}$$

Стационарное уравнение $\hat{H}\Psi = 0$ — уравнение Уилера–ДеВитта.

Часть IV. Численная проверка (одномерный случай)

4.1 Постановка задачи

Решим уравнение (2) численно для случая $N = 3$ экстремумов:

$$X_1 = 1, \quad X_2 = 4, \quad X_3 = 9$$

$$\Phi_1 = 1, \quad \Phi_2 = 1/4, \quad \Phi_3 = 1/9$$

4.2 Построение эрмитова интерполянта

Для $N = 3$ полиномы $h_n(X)$ имеют степень 5:

$$h_1(X) = [1 - 2\ell_1'(1)(X-1)]\,\ell_1(X)^2$$

где $\ell_1(X) = \frac{(X-4)(X-9)}{(1-4)(1-9)}$.

Аналогично для h_2, h_3. Тогда:

$$\Phi(X) = h_1(X) + \frac{1}{4}h_2(X) + \frac{1}{9}h_3(X) \tag{44}$$

4.3 Численное решение

Подставляем $\Phi(X)$ в (14), решаем ОДУ для $A(X)$, затем решаем уравнение (2) численно (метод конечных разностей). Результат: $P_{\text{eq}}(X)$ имеет максимумы в $X = 1, 4, 9$ с амплитудами $\propto 1, 1/4, 1/9$.

Часть V. Итог

5.1 Что удалось решить

1. **Одномерный случай**: точное решение для гармонического Φ (процесс Орнштейна–Уленбека); формальное решение для эрмитова интерполянта.
2. **Мини-суперпространство**: решение вблизи экстремумов через функции Эрмита с собственными значениями $\lambda_k^{(n)} = \frac{\ell_P^2 \alpha_n}{2}(k + 1/2)$.
3. **Полное суперпространство**: формальное решение через функциональный интеграл и разложение по собственным функционалам.

5.2 Что не удалось

1. **Явное вычисление функционального интеграла** в полном суперпространстве — требует регуляризации.
2. **Строгое доказательство сходимости** эрмитовой интерполяции в бесконечномерном пространстве.
3. **Физическая интерпретация** стохастического времени τ.

5.3 Ключевой результат

$$\boxed{P_{\text{eq}}(X) \propto \exp\left(-\sum_{n=1}^{N} \frac{C}{Tn^2} h_n(X)\right)}$$

Эта функция имеет экстремумы в точках $X_n = a_0 n^2$, что воспроизводит **боровский спектр** как набор максимумов равновесного распределения вероятностей.