

Управляемая динамика шара на вращающейся периодически наклоняемой платформе

Научно-исследовательская постановка и математическая модель

Статус: концептуальная и вычислительная постановка. Численные результаты и экспериментальная проверка должны быть выполнены отдельно.

Аннотация. Рассматривается гибридная динамическая система: шар движется под действием гравитации и сопротивления воздуха, сталкивается с круглой платформой конечного радиуса, а платформа вращается и периодически меняет наклон. При контакте учитываются коэффициент восстановления и трение. Исследуется возможность управлять положением шара посредством изменения наклона и скорости вращения платформы, в частности формировать устойчивое движение около центра. Предлагается модель, критерии режимов и схема перехода к робототехническому управлению.

Ключевые слова: гибридная динамическая система; столкновения; нелинейная динамика; вращающаяся платформа; теория управления; робототехника; устойчивость; карта режимов.

1. Постановка задачи

Исходный вопрос: сможет ли шар после последовательных отскоков на вращающейся наклонной платформе вернуться в центральную область? Для этого вводятся конечный радиус платформы, сопротивление воздуха, трение, коэффициент восстановления, вращение вокруг центральной оси и волнообразное изменение угла наклона.

Главный исследовательский вопрос: можно ли подобрать закон наклона и вращения платформы так, чтобы шар из заданного начального состояния устойчиво возвращался в заданную центральную область и не сходил с платформы?

2. Параметры базовой модели

Параметр	Обозначение	Значение
Масса шара	m	0,005 кг
Радиус шара	r_b	0,005 м
Радиус платформы	R	0,5 м
Начальная высота	h_0	0,35 м
Скорость перед первым ударом	v_0	3,2 м/с
Коэффициент восстановления	e	0,8
Коэффициент трения	μ	0,026
Коэффициент сопротивления	C_d	1,27
Вращение	n	10 об/мин
Начальный угол	θ	3,14°
Первый удар	—	строго в центре

3. Кинематика платформы

Волнообразный наклон задаётся:

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_A \sin(2\pi f t + \varphi)$$

Азимут направления наклона при вращении:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_0^t \Omega(\tau) d\tau$$

Для постоянных 10 об/мин: $\Omega = 2\pi \cdot 10/60 \approx 1,0472$ рад/с.

Единичная нормаль платформы:

$$n(t) = (\sin\theta \cos\alpha, \sin\theta \sin\alpha, \cos\theta)$$

4. Движение шара между ударами

Состояние шара:

$$X = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$$

Уравнения:

$$dr/dt = v$$

$$m dv/dt = m g - \frac{1}{2} \rho C_d A |v - v_a| (v - v_a)$$

$A = \pi r_b^2$. Плотность воздуха ρ и состояние воздушного потока должны быть явно заданы при численном расчёте.

5. Контакт с вращающейся платформой

Скорость поверхности в точке контакта:

$$v_p = \Omega \times r_c$$

Относительная скорость:

$$v_{rel} = v - v_p$$

Нормальная скорость после удара:

$$v_n^+ = -e v_n^-$$

Касательная компонента корректируется контактным импульсом трения. Полная реализация должна явно выбрать контактную модель, учитывать скольжение и, при необходимости, вращение самого шара.

6. Конечность платформы

Центр шара должен удовлетворять:

$$r_{center} < R - r_b = 0,495 \text{ м}$$

При достижении границы шар считается сошедшим с платформы. Таким образом, система имеет события «удар» и «сход».

7. Отображение столкновений

Состояние сразу после n -го удара обозначается X_n . Тогда:

$$X_{(n+1)} = F(X_n, \theta(t_n), \Omega(t_n), e, \mu, C_d)$$

Это отображение является основным объектом анализа: оно связывает одно столкновение со следующим.

8. Карта режимов

Расстояние до центра:

$$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

Вводится целевая область, например $r_{target} = 0,05$ м. Режимы классифицируются как: центральный, периодический, квазипериодический, чувствительный/хаотический и краевой (сход).

Основная карта строится в координатах (θ_A, f) , а затем повторяется для разных Ω . Для каждой точки проводится несколько запусков с близкими начальными условиями.

9. Переход к теории управления

Камера или другой датчик оценивает x, y, v_x, v_y . Контроллер изменяет наклон и скорость вращения платформы.

Ошибка положения относительно центра:

$$e_p = (-x, -y)$$

Простейшее обратное управление:

$$\theta_x = -K_x x - K_v v_x; \theta_y = -K_y y - K_v v_y$$

Для более сложной системы предлагается MPC (Model Predictive Control), который прогнозирует будущие столкновения и выбирает управление с минимальной ошибкой при ограничениях приводов.

10. Робототехническая интерпретация

Платформа становится исполнительным механизмом, а шар — управляемым объектом. Замкнутый контур имеет вид:

датчик → оценка состояния → модель → контроллер → наклон/вращение → движение шара → датчик

Потенциальные применения: центрирование деталей, бесконтактное перемещение, сортировка, подача малых компонентов и исследование гибридных робототехнических механизмов.

11. Сравнение с известными моделями

Базовая часть относится к известным задачам о прыгающей частице, виброударным системам и гибридной динамике. Сам по себе отскок, коэффициент восстановления или периодическое движение поверхности не являются новыми.

Потенциально интересной является совместная конфигурация: конечная вращающаяся платформа + пространственное движение + переменный наклон + контактное трение + управление положением. Научная новизна должна подтверждаться конкретным результатом, а не только сложностью модели.

12. План численного и физического эксперимента

1. Проверить базовую модель на неподвижной горизонтальной платформе.
2. Добавить постоянный наклон и сравнить с аналитическими оценками.
3. Добавить вращение.
4. Добавить периодический наклон.
5. Построить карту режимов по θ_A и f .
6. Повторить исследование для разных Ω .
7. Оценить чувствительность к начальным условиям.
8. Добавить обратную связь и сравнить с режимом без управления.
9. Создать физический прототип и сравнить траектории с моделью.

13. Итоговая научная гипотеза

Гипотеза: периодическое изменение ориентации и угловой скорости конечной вращающейся платформы может при определённых параметрах создавать устойчивую область притяжения для отскакивающего объекта, позволяя удерживать его около заданной точки без непосредственного захвата.

14. Итоговое решение и вывод

Модель объединяет механику полёта, аэродинамическое сопротивление, контактную механику, трение, вращение, периодический наклон и дискретные столкновения. В математическом смысле это гибридная динамическая система:

$$dX/dt = f(X, U), X^+ = G(X^-, U)$$

где U содержит параметры наклона и вращения.

Ключевой критерий управления: добиться $r_n \rightarrow r_{\text{target}}$ при условии $r_n < 0,495$ м. Если такой режим существует и устойчив к небольшим изменениям начальных условий, он становится кандидатом для практического управления.

Вывод: проект имеет корректную исследовательскую основу для нелинейной динамики, гибридных систем и робототехники. Однако до численного расчёта нельзя утверждать, что устойчивый центральный режим действительно существует, и нельзя заявлять о новой фундаментальной физике. Следующий обязательный шаг — вычислить карту режимов и проверить её экспериментом.

Приложение. Компактная математическая система

$$dr/dt = v$$

$$m \, dv/dt = m \, g - \frac{1}{2} \rho C_d A |v - v_a| (v - v_a)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_A \sin(2\pi f t + \varphi)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int \Omega(t) dt$$

$$n(t) = (\sin\theta \cos\alpha, \sin\theta \sin\alpha, \cos\theta)$$

$$v_p = \Omega \times r_c$$

$$v_{rel} = v - v_p$$

$$v_n^+ = -e \, v_n^-$$

$$X_{(n+1)} = F(X_n, \theta(t_n), \Omega(t_n), e, \mu, C_d)$$

$$U^*(t) = \arg \min_U J(X, U)$$

Примечание

Этот документ оформлен как проект препринта. Численные значения количества отскоков, времени между ударами и существования аттрактора не являются установленными результатами, пока не получены из воспроизводимой численной симуляции или физического эксперимента.