

Арифметика состояний

Введение

Предлагаемый материал направлен на устранение когнитивных сложностей при усвоении арифметики положительных и отрицательных чисел и предлагает геометрическую трактовку правил классической арифметики.

Необходимость его написания вызвана следующими аспектами классической арифметики. Введение единой числовой оси привело к тому, что положительные числа представляются как более важные, чем отрицательные. Примером этого является то, что визуально нуль и модуль ассоциируются с положительными числами, а также то, что соотношение между модулями чисел и их положением на единой числовой оси диаметрально противоположно для положительных и отрицательных чисел. Это приводит к тому, что если целью расчёта будут отрицательные числа, все правила сравнения в расчёте придётся инвертировать.

Также возникает проблема идентификации нулевой точки на единой числовой оси в условиях строгой транзитивности отношения значений чисел на всей единой оси – точка находится в середине оси, но она является точкой начала и положительной, и отрицательной числовой осей, и отсчёт чисел идёт от нуля. С точки зрения геометрической наглядности это нелогично.

Другой проблемой является жёсткая привязка модуля к положительным числам. Например, запись $||-5| - 6| = 1$ вырабатывает не понимание того, что модуль числа – это отдельная сущность, одинаковая и для положительных, и для отрицательных чисел, а понимание того, что модуль – просто альтернативная запись положительных чисел с привязкой к положению на положительной числовой оси.

Краткость синтаксиса (экономия чернил) в классической арифметике приводит к тому, что символы часто перегружены, что создаёт неявные когнитивные сложности по удержанию контекста. Например, символы сравнения $<$ и $>$ используются как для сравнения чисел на числовой оси, так и для сравнения их модулей. Символ $=$ означает как сравнение на равенство по положению на числовой оси или по модулю, так и присваивание.

Цель работы – дать численным результатам трактовку, понятную для описания систем с двумя состояниями, с однозначным синтаксисом.

Решение

Для решения данных проблем предлагаются следующие нововведения:

1. Все числа, как положительные, так и отрицательные, записываются с явным знаком $+$ и $-$. Нуль остаётся беззнаковым, как индикатор того, что это выделенная точка, не принадлежащая ни одной числовой оси, но служащая точкой соединения и перехода между ними.

2. Модуль любого числа записывается в беззнаковом виде. Он определяется расстоянием от нуля до точки, соответствующей данному числу, на определённой числовой оси без знака этой числовой оси. Любое число является совокупностью модуля и знака, определяющего принадлежность числа определённой числовой оси. Новые символы сравнения: $<|$, $>|$, $=|$, $\#|$, $<>|$ используются для сравнения чисел только по модулю. Вводится символ присваивания переменной значения модуля в виде беззнакового модуля, знакового числа или числового результата функции – $:=|$. Модулю можно присвоить число, обратное присвоение невозможно. Использование модулей в арифметических выражениях ограничено символами сравнения и присваивания. Нуль является наименьшим значением модуля. Пример: $-6 >| -4$, $-6 >| +4$, $-6 >| 4$, $-4 =| +4$, $-4 =| 4$, $x :=| 4$, $x :=| -4$, $x :=| \sqrt{2^2}$. Для присваивания переменной знакового числа, знакового числового результата арифметического выражения или функции, а также эквивалентного значения при замене переменных в процессе алгебраических преобразований используется символ $- :=$. Различие между символами сравнения и присваивания заключается в том, что символы сравнения подразумевают логический тип возвращаемого результата – ложь или истина, а символы присваивания никакого возвращаемого результата не подразумевают.

3. Для обозначения выбора числовой оси в неравенствах с нулём в правой части или обозначения направления приближения к нулю при вычислении односторонних пределов используются обозначения $+0$ и -0 .

4. В случае многозначных функций выбор результата может осуществляться явным указанием знака, например, $+\sqrt{x^2}$ или $-\sqrt{x^2}$.

5. Единая числовая ось упраздняется, числовые оси равноценны. Геометрическое представление числовых осей теперь выглядит так, как на рисунке 1.

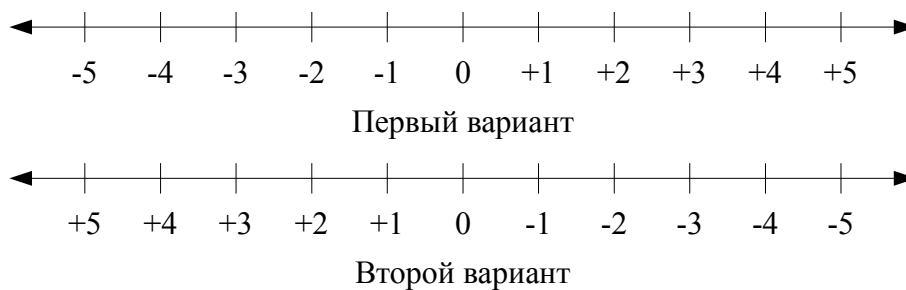


Рисунок 1. Два варианта геометрического представления положительной и отрицательной числовой оси.

Оба варианта геометрического представления числовых осей равноценны. Символы $>$, $<$, $=$, $\#$, $<>$ являются аналогами соответствующих символов сравнения по модулю ($>|$, $<|$, $=|$, $\#|$, $<>|$) применительно к конкретным числовым осям, включая нуль. Обозначение $> +3$ показывает направление, где положительные числа по модулю больше $+3$, то есть интервал $(+3, +\infty)$ – движение от нуля. Обозначение $< +3$ указывает на числа, которые по модулю меньше $+3$, в пределах своей (положительной) числовой оси, включая нуль, то есть интервал $[0, +3)$ – движение к нулю. Это удобнее смотреть на первом варианте рисунка 1. Аналогично и для отрицательной числовой оси. Обозначение > -3 показывает направление, где отрицательные числа по модулю больше -3 , то есть интервал $(-3, -\infty)$ – движение от нуля. Обозначение < -3 указывает на числа, которые по модулю меньше -3 , в пределах своей (отрицательной) числовой оси, включая нуль, то есть интервал $[0, -3)$ – движение к нулю. Это удобнее смотреть на втором варианте рисунка 1.

6. Сравнение чисел на разных числовых осях производится только по модулю.

7. Запись интервалов использует следующее правило – левый предел по модулю меньше правого. Правильная запись интервалов была показана выше, в случае знакопеременных интервалов правильная запись интервалов, например, следующая – $(-2, +3)$, $(+2, -3)$. Такая запись интервалов имеет геометрический смысл – мы сначала идём по той числовой оси, на которой расстояние от предела до нуля меньше, а потом через нуль переходим на другую числовую ось, где расстояние от нуля до предела больше. При этом сам отрезок движения остаётся последовательным, упорядоченным и направленным. Знаки левого и правого пределов определяют направление движения и знак шага движения. В случае равенства по модулю левого и правого предела обе записи правильные – $(-2, +2)$, $(+3, -3)$, поэтому конкретный вид записи может определяться контекстом решаемого неравенства. Это придаёт системе определённую гибкость (например, взятие определённого интеграла по интервалу).

Пояснение: далее в тексте слова больше, меньше, равно означает сравнение по модулю.

Следствия

1. Единые правила сравнения на обеих числовых осях. Устраняется указанная выше проблема с восприятием отношения отрицательных чисел по положению на оси и по модулю.

2. Устраняется необходимость в отдельной операции взятия модуля. В случае использования модуля (согласно его определению в классической арифметике) в арифметическом выражении, он заменяется на $+\sqrt{x^2}$. Такой подход прекрасно распространяется на многомерные пространства.

3. Для операции сложения сохраняются переместительное и сочетательное свойства, а также свойство существования противоположного элемента. Для умножения сохраняются переместительное и сочетательное свойства, а также распределительное свойство относительно сложения и вычитания.

4. Поскольку нет единой числовой оси, то транзитивность неравенства чисел сохраняется только в пределах одной числовой оси. Она сохраняется для обеих числовых осей только при сравнении по модулю.

5. В случае целочисленного деления и нахождения остатка упраздняется правило – остаток всегда положителен. Теперь $+15 \text{ DIV } +4 = +3$, $+15 \text{ MOD } +4 = +3$, $-15 \text{ DIV } +4 = -3$, $-15 \text{ MOD } +4 = -3$.

6. Изложенные выше правила сравнения позволяют лучше объяснить визуальное соотношение чётных функций и их производных на отрицательной числовой оси. Например, для функции $y = x^2$ производная $y = 2x$. В точке $x = -2$ значение производной равно -4 , в точке $x = -3$ значение производной равно -6 . В классической арифметике $-4 > -6$, но график функции изменяется медленнее, поэтому надо помнить про модули. В излагаемой арифметике $-6 > -4$, поэтому нет визуального рассогласования между графиком функции и графиком её производной.

7. В случае сложения модуль и знак результата зависят от соотношения слагаемых. Когда складываются числа на одной числовой оси, модуль результата равен сумме модулей слагаемых и знак результата совпадает со знаками слагаемых. В случае сложения чисел на разных числовых осях модуль результата равен разности модулей большего и меньшего числа, а знак результата совпадает со знаком большего слагаемого. В случае вычитания чисел одинакового знака модуль результата равен разности модулей большего и меньшего чисел, а знак результата совпадает со знаком уменьшаемого, если уменьшаемое больше вычитаемого, и лежит на другой числовой оси, если уменьшаемое меньше вычитаемого. При вычитании чисел на разных числовых осях модуль результата равен сумме модулей уменьшаемого и вычитаемого, а знак результата совпадает со знаком уменьшаемого. Геометрически это означает, что сложение – это движение по своей числовой оси в сторону

бесконечности, а вычитание – движение по своей числовой оси в сторону нуля. При такой геометрической интерпретации сложение чисел разных знаков означает разворот на своей числовой оси из-за знака второго слагаемого и движение в сторону нуля, что эквивалентно направлению вычитания. Аналогично вычитание чисел разных знаков тоже означает разворот на своей числовой оси из-за знака вычитаемого и движение в сторону бесконечности, что эквивалентно направлению сложения.

8. Правила знака результата при умножении и делении определяются геометрически – переходом на другую числовую ось. Приведём пример для целочисленного множителя. При этом умножение служит краткой записью сложения, если множитель положительный, или вычитания, если множитель отрицательный. Пусть множимое равно a , множитель равен $+3$. Тогда выражение $b = a * (+3) = 0 + a + a + a$. Движение идёт по числовой оси, к которой принадлежит множимое a , поэтому знак результата b совпадает со знаком множимого a . Когда множитель отрицательный, выражение $b = a * (-3) = 0 - a - a - a$. Движение идёт по другой числовой оси, поэтому знак результата b противоположен знаку множимого a .

В случае деления рассуждения аналогичны. Пусть делитель равен $+3$, тогда выражение $b = a / (+3)$ заменяется эквивалентным ему выражением $a = b * (+3)$. Из вышеописанных рассуждений следует, что знак b должен быть равен знаку a . Аналогично для отрицательного делителя выражение $b = a / (-3)$ заменяется выражением $a = b * (-3)$. Знак b должен быть обратным знаку a . Аналогичные рассуждения и в случае, когда мы рассматриваем делимое разных знаков. Пусть делимое равно $+3$, тогда выражение $b = (+3) / a$ заменяется эквивалентным ему выражением $a * b = +3$. Из вышеописанных рассуждений следует, что знак b должен быть равен знаку a . Аналогично для отрицательного делимого выражение $b = (-3) / a$ заменяется выражением $a * b = -3$. Знак b должен быть обратным знаку a .

Эти рассуждения позволяют определить знаки результата, когда множимое и множитель, делимое и делитель являются рациональными числами. В случае иррациональных чисел их можно представить рациональными числами с бесконечным количеством цифр, но сути рассуждений это не меняет.

9. При вычислении односторонних пределов используются обозначения $x \rightarrow +0$ и $x \rightarrow -0$.

10. Вычисления алгебраических и трансцендентных функций не меняется, потому что при их вычислении используются модули и знаки (как в ряде Тейлора, используемом для вычисления трансцендентных функций).

11. Вычисление производных, пределов и интегралов не меняется, потому что любой интервал чисел, указанный пределами интегрирования, является последовательным, упорядоченным и непрерывным.

Решение неравенств

Для корректного решения неравенств необходимо выполнять следующие правила:

1. При раскрытии модуля знак неравенства сохраняется (символы $<$ и $>$ имеют одинаковое направление на разных числовых осях).

2. Умножение левой и правой части на отрицательное число не меняет знак неравенства – это прямое отображение с одной числовой оси на другую числовую ось (символы $<$ и $>$ имеют одинаковое направление на разных числовых осях).

3. Если в исходном неравенстве при переносе числа из левой части в правую в результирующем неравенстве меняется знак числа в правой части, то в результирующем неравенстве меняется знак неравенства.

Пояснение: при смене знака числа в правой части мы переходим на другую числовую ось согласно рисунку 1, но при этом не должно измениться направление движения относительно исходной числовой оси. То есть, если на исходной числовой оси был знак $>$, то направление было в сторону ∞ , поэтому на результирующей оси будет знак $<$, направляющий в сторону нуля на своей числовой оси и далее в сторону бесконечности на исходной числовой оси. Аналогично, если на исходной числовой оси был знак $<$, направляющий в сторону нуля на своей числовой оси и далее в сторону ∞ на другой числовой оси, то на результирующей числовой оси будет знак $>$ направлением в сторону ∞ .

3.1. Если в исходном неравенстве был знак $>$ и после переноса числа из левой части в правую в результирующем неравенстве поменялся знак числа в правой части (и, соответственно, знак неравенства согласно правилу 3), то в решение включается числовая ось, включая нуль, которая соответствовала знаку числа в правой части исходного неравенства, с помощью объединения интервалов. Это правило вытекает из отсутствия единой числовой оси и его следствия – отсутствия глобальной транзитивности сравнения по единой числовой оси.

4. Если в результате решения одного неравенства или нескольких неравенств есть интервалы на разных числовых осях (в том числе при выполнении правила 3.1), то общее решение находится как объединение интервалов, иначе как пересечение интервалов.

Продемонстрируем это на примерах. Решим неравенство с модулем: $x + (+10) > 2$. Раскрываем его согласно правилу 1 как $x + (+10) > +2$, $x + (+10) > -2$. Переносим в обоих неравенствах числовое слагаемое в правую часть и получаем $x < -8$ (согласно правилу 3, поскольку меняется знак правой части, то меняется знак неравенства, и согласно правилу 3.1 в общее решение включается интервал $[0, +\infty)$, поскольку исходный знак

неравенства был $>$), $x > -12$. Раз в решение входят интервалы на разных числовых осях, то согласно правилу 4 результатом будет объединение трёх интервалов $(-12, -\infty) \cup (-8, 0] \cup [0, +\infty)$. Объединяя второй и третий интервалы, записываем решение как $(-12, -\infty) \cup (-8, +\infty)$.

Теперь решим неравенство с другим знаком сравнения по модулю: $x + (+10) |<| 2$. Раскрываем его согласно правилу 1 как $x + (+10) < +2$, $x + (+10) < -2$. Переносим числовое слагаемое в обоих неравенствах в правую часть и получаем $x > -8$, $x < -12$ (выполняется правило 3, но не выполняется правило 3.1 (исходный знак неравенства был $<$)). Согласно правилу 4 записываем результат как пересечение двух интервалов – $[0, -12) \cap (-8, -\infty) = (-8, -12)$.

Решим обычную совокупность неравенств $-10 > x < +3$. Преобразуем его в $x < -10$, $x < +3$. Первое неравенство даёт интервал $[0, -10)$, второе даёт интервал $[0, +3)$. Согласно правилу 4, общее решение является объединением этих интервалов, которое даёт интервал $(+3, -10)$.

Продемонстрируем правильность правила 2. Как уже было указано ранее, неравенство $x + (+10) > +2$ имеет решением для x объединение интервалов $(-8, 0] \cup (0, +\infty)$. Умножаем обе части неравенства на -1 и получаем $(-10) - x > -2$. Делаем замену переменной $y := -x$ и получаем $y + (-10) > -2$. Переносим числовое слагаемое в правую часть и получаем $y < +8$, что согласно правилу 3.1 включает интервал $[0, -\infty)$, поскольку исходный знак неравенства был $>$. Общее решение для y согласно правилу 4 получается объединением интервалов $[0, +8) \cup [0, -\infty) = (+8, -\infty)$. Проводя обратную замену переменной $x := -y$, инвертируем итоговый интервал для y и получаем $(-8, +\infty)$, что доказывает правильность правила 2 (для исходного неравенства решение – интервал $(-8, +\infty)$).

Теперь продемонстрируем решение неравенств, где правая часть равна нулю. Решим классическое неравенство $x |<| 0$. Раскладывая его на два неравенства согласно правилу 1 – $x < +0$ и $x < -0$, получаем решение обоих неравенств в виде пустого множества $\emptyset$. Поэтому общее решение в виде объединения неравенств согласно правилу 4 даёт пустое множество $\emptyset$. Аналогично классическое неравенство $x |>| 0$ по правилу 1 раскладывается в два неравенства $x > +0$ и $x > -0$ и имеет решением согласно правилу 4 объединение интервалов $(0, -\infty) \cup (0, +\infty)$. Также решим обычное неравенство $x + (+4) > +4$. Переносим числовое слагаемое из левой части в правую, получаем неравенство $x > +0$, имеющее решением интервал $(0, +\infty)$.

Решим более сложное неравенство: $(x - (+1)) * (x + (-2)) > +0$. Это неравенство будет иметь возможное решение при двух условиях – оба множителя положительны или оба множителя отрицательны.

Решаем неравенство как систему неравенств в предположении положительности обоих множителей: $x - (+1) > +0$, $x + (-2) > +0$. Первое неравенство системы после переноса числа в правую часть имеет вид $x > +1$ и его решением является интервал $(+1, +\infty)$. Второе неравенство после переноса числа в правую часть имеет вид $x > +2$ и его решение – интервал $(+2, +\infty)$. Поскольку мы решаем систему уравнений, то общее решение будет пересечением интервалов – $(+2, +\infty)$.

Решаем неравенство как систему неравенств в предположении отрицательности обоих множителей: $x - (+1) > -0$, $x + (-2) > -0$. Первое неравенство системы после переноса числа в правую часть имеет вид $x < +1$ согласно правилу 3 и согласно правилу 3.1 включает в себя интервал $[0, -\infty)$. Его решение – объединение интервалов $[0, +1) \cup [0, -\infty) = (+1, -\infty)$. Второе неравенство после переноса числа в правую часть имеет вид $x < +2$ согласно правилу 3 и согласно правилу 3.1 включает в себя интервал $[0, -\infty)$. Его решение – объединение интервалов $[0, +2) \cup [0, -\infty) = (+2, -\infty)$. Пересечение этих интервалов даёт интервал решения $(+1, -\infty)$.

Поскольку изначальное неравенство мы рассматриваем в двух непересекающихся предположениях, то общим решением будет объединение двух решений. Итоговое решение – $(+2, +\infty) \cup (+1, -\infty)$.

Преимущества

1. Все правила выведены геометрически.
2. Чёткое разделение модулей и чисел (модуль визуально не ассоциируется с положительными числами).
3. Выделенная точка нуля является центром геометрической интерпретации излагаемой арифметики. Образно говоря – нуль это точка, которая одновременно относится как к числам, так и к модулям.
4. Разделение символов для сравнения по модулю и по положению на геометрической оси.
5. В случае многозначных функций указание знака перед формулой позволяет ограничить решения определённой числовой осью. Беззнаковая запись функции указывает на нахождение решений на всех числовых осях. В классической арифметике для нахождения всех корней, например, квадратного корня, надо использовать символ $\pm$.
6. Более понятное решение уравнений и неравенств с модулями – не надо сопоставлять условия неравенства с условиями раскрытия модуля, как в классической арифметике.

Решим уравнение с модулями в классической арифметике и в излагаемой арифметике. Оценку проведём по элементарным шагам.

Классическая арифметика: $||x - 6| - 17| = 10$.

1 шаг: $|x - 6| - 17 = 10$.

2 шаг: $-|x - 6| + 17 = 10$.

3 шаг: $|x - 6| = 27$.
 4 шаг: $-|x - 6| = -7$.
 5 шаг: $x - 6 = 27$.
 6 шаг: $6 - x = 27$.
 7 шаг: $-x + 6 = -7$.
 8 шаг: $x - 6 = -7$.
 9 шаг: $x = 33$.
 10 шаг: $x = -21$.
 11 шаг: $x = 13$.
 12 шаг: $x = -1$.

Осуществляем проверку правильности раскрытия модулей для найденных корней. Подставляем $x = 33$ в третий шаг: $33 - 6$ больше нуля, следовательно, модуль раскрыт правильно (из шага 3 в шаг 5). Подставляем $x = -21$ в третий шаг и получаем $-21 - 6$ меньше нуля, следовательно, модуль раскрыт правильно (из шага 3 в шаг 6). Подставляем $x = 13$ в четвёртый шаг и получаем $-(13 - 6)$ меньше нуля, значит, модуль раскрыт правильно (из шага 4 в шаг 7). Подставляем $x = -1$ в четвёртый шаг и получаем $-(-1 - 6)$ больше нуля, значит, модуль раскрыт правильно (из шага 4 в шаг 8). Проверка показала, что все решения найдены правильно.

Излагаемая арифметика: $+\sqrt{(+\sqrt{(x-(+6))^2-(+17)})^2}=+10$.

1 шаг: $+\sqrt{(x-(+6))^2-(+17)}=+10$.

2 шаг: $+\sqrt{(x-(+6))^2-(+17)}=-10$.

3 шаг: $+\sqrt{(x-(+6))^2}=+27$.

4 шаг: $+\sqrt{(x-(+6))^2}=+7$.

5 шаг: $x - (+6) = +27$.

6 шаг: $x - (+6) = -27$.

7 шаг: $x - (+6) = +7$.

8 шаг: $x - (+6) = -7$.

9 шаг: $x := +33$.

10 шаг: $x := -21$.

11 шаг: $x := +13$.

12 шаг: $x := -1$.

Как видно, в излагаемой арифметике мы получаем результат за такое же число шагов (опускаются ненужные операции возведения в квадрат и извлечения квадратного корня), что и в классической арифметике. Но более быстрое вычисление в излагаемой арифметике может быть достигнуто за счёт отсутствия проверок условия раскрытия модуля в классической арифметике, которые были опущены в изложенной последовательности. Также при сравнении процедуры вычисления в разных видах арифметики видно, что в классической необходимо менять левую часть выражения в зависимости от схемы раскрытия модуля, что создаёт дополнительный источник ошибок, тогда как в излагаемой арифметике левая часть не меняется, меняется только знак числа в правой части, что визуально отследить гораздо проще.

7. Сравнение чисел по модулю придаёт более наглядный физический смысл результатам в тех задачах, где используются два состояния, например, тепло/холод, ускорение/замедление, прибыль/убыток и так далее. При этом холод < -5 градусов подразумевает переход в тепло, а прибыль $< +5$ рублей подразумевает переход в убыток.

8. Излагаемая арифметика идеально ложится на прямой код в процессорах, где симметричные диапазоны и два нуля $+0$ и -0 . Этот подход уже реализован в IEEE 754.

9. Поскольку сравнение теперь подразумевает сравнение только по модулю, правила сложения и вычитания записываются короче, чем в классической арифметике, из-за отсутствия необходимости каждый раз к словам больший и меньший добавлять – по модулю.

Послесловие

Если подходить к оценке классической арифметики и арифметики состояний с позиций языков программирования, то образно можно сказать, что классическая арифметика – это язык Си, потому что краткий синтаксис, но много неявных соглашений, что усложняет разбор текста, обнаружение ошибок и компиляцию. Арифметика состояний – это язык Паскаль (или Модуль-2, или Оберон/Оберон-07), потому что больше символов, типов данных, длиннее запись операций, но зато проще разбор текста, обнаружение ошибок и компиляция.

Таблица соответствия между классической арифметикой и излагаемой арифметикой

Запись в классической арифметике	Запись в арифметике состояний	Смысл выражения
$x = 5, x = -5$	$x := +5, x := -5$	Присваивание переменной знаково-го значения

$ x = 5$	$x \mid= 5$	Сравнение по модулю
$x > 5, x > -5$	$x > +5, x > -5$	Сравнение на разных числовых осях
$-5 > -7$	$-5 < -7$	Сравнение на отрицательной числовой оси, дающее истину
$ x < 5$	$x \mid< 5$	Модуль x меньше 5
$x = -y$	$x := -y$	Замена переменной
$x = -4 $	$x \mid:= -4$	Присваивание переменной модуля числа
$(-\infty, 5), (-3, 2), (-3, -2), (2, 5)$	$(+5, -\infty), (+2, -3), (-2, -3), (+2, +5)$	Правильная запись интервалов
$ x $	$+\sqrt{x^2}$	Модуль в классической арифметике и его эквивалент в излагаемой арифметике

Ошибки, обнаруживаемые синтаксисом излагаемой арифметики

1. В любом арифметическом выражении запись типа $x + 5, x - 5, x * 5, x / 5$ будет идентифицирована как ошибочная. В классической арифметике записи $x - (-5), x - |-5|$ не являются ошибочными, но дают разные результаты.

2. Если переменная x декларирована как число, запись с символами присвоения для модулей, например, $x \mid:= -5$ будет идентифицирована как ошибочная. В классической арифметике запись $x = |-5|$ не является ошибочной, но может дать разные результаты, если неверно истолкован контекст – присвоение или сравнение.

3. Если переменная x декларирована как модуль, запись с символами сравнения и присвоения для чисел, например, $x > +5, x := -5$ будет идентифицирована как ошибочная. В классической арифметике запись $|x| = -5$ не является ошибочной, она будет переопределена как сравнение, дающее ложь.

4. Запись, где сравниваются числа разных знаков, например, $+5 < -3$, будет квалифицирована как ошибочная. В классической арифметике это правильная запись сравнения, дающая ложь.

5. Записи сравнения и присвоения разделены разными символами: $x := -5$ (присвоение), $x = -5$ (сравнение). В классической арифметике без анализа предыдущего контекста нельзя сказать, означает запись $x = -5$ сравнение или присвоение.